

小特集

大強度荷電粒子ビームの物理と応用

2. 粒子加速器における大強度荷電粒子ビーム

木代純逸, 高山 健
(高エネルギー加速器研究機構加速器研究施設)

High Intensity Charged Particle Beams in Particle Accelerators

KISHIRO Junichi and TAKAYAMA Ken
*Accelerator Laboratory, High Energy Accelerator Research Organization (KEK),
Tsukuba 305-0801, Japan*
(Received 9 October 1999)

Abstract

Essential aspects of beam physics in high intensity and high energy circular accelerators are described. Main issues such as tune spread, nonlinear resonances, and halo formation associated with space-charge effects are discussed. Typical coherent instabilities which had been the primary objections to upgrading the KEK 12 GeV proton synchrotron are introduced.

Keywords:

synchrotron, betatron oscillation, tune, transition, nonlinear resonance, space-charge force, halo, wake, impedance, head-tail instability, microwave instability

2.1 はじめに

高エネルギー加速器中の荷電粒子は比較的希薄な単一種類の粒子集団である。プラズマ物理の基本前提である大局的に中性という条件は成立していない。また、この粒子集団が一次元方向のみ超相対論的領域まで加速されるというのがもう一つの特徴である。これらの特徴に即して、加速器中の粒子の振る舞いを記述する物理が、高エネルギー加速器の進化に併せて発展させられてきた[1]。この道具立ての95%は古典力学と古典電磁気学でこと足りる。ただし、この古典物理の応用において、そのレベルは“the state of the art”の域に達しているというのが筆者らの認識である。ビーム物理の守備範囲は比較的狭い。加速される粒子がレプトンかハドロンかで差異はあるが、極論すると加速、蓄積を通じて荷電粒子ビームの空間的安定性の議論に尽きる。

corresponding author's e-mail: takayama@post.kek.jp

この小論で解説できるビーム物理の範囲は限られる。しかし、最も重要で普遍的と思える概念に触れることなくして、研究現場で話題になっている問題の理解が得られるとは思えない。そこで、まず磁場による閉じ込めの線形粒子ビーム力学を、復元力係数が時間に依存する調和振動子の力学として論じ、RF電場による閉じ込めの力学を不連続な standard mapping の手法で解説する[2]。これらは単一粒子力学である。粒子相互間の作用が無視できない大強度ビーム特有の問題を2.5-2.6節で論じる。

2.2 強収束とベータトロロン振動

円形の加速器ではまず、粒子ビームの繰り返し加速を可能にするためには時間的にランプする偏向磁石を用いて、加速中も常に一定の閉軌道を作らねばならない。入

射器で造られる粒子ビームは発生の段階で進行方向とともに垂直方向にも速度成分を持っているし、加速途上で残留ガス分子による散乱、粒子同士の散乱、ガイド磁場のエラー成分等の外乱により必ず横方向速度成分を得てしまう。もし横方向の閉じ込めに手を尽くさねば、いずれ粒子ビームは真空容器壁に当たって失われてしまう。このため、偏向磁石とは別に横方向の閉じ込めに四極磁場を使用する。ビームの進行軸に対して水平、垂直両方向で、収束と発散力を与えるよう、強く励磁した極性の異なる四極磁石を閉軌道に沿って交互にならべる。この収束方式を強収束と呼ぶ[3]。偏向磁石の配列によって決まる閉軌道を座標軸（軌道軸-s-）に取り、閉軌道から垂直方向の変位を x, y とすれば、粒子の運動は以下のような軌道方程式によって記述できる。

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{K_x(s)}{1 + \Delta p/p} x = \frac{1}{r(s)} \frac{\Delta p}{p} - \frac{(\Delta B)_y}{B_y r},$$

$$K_x(s) = \frac{1}{r^2(s)} + K(s), \quad \left[K(s) = \frac{e}{mc \beta \gamma} \frac{\partial B_y(0,0,s)}{\partial x} \right]$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{K_y(s)}{1 + \Delta p/p} y = - \frac{(\Delta B)_x}{B_y r}, \quad K_y(s) = -K(s)$$

ここで、理想的偏向磁場 B_y の下、一定の閉軌道上にある粒子の運動量からのずれ（誤差）を $\Delta p/p$ 、四極磁石の磁場勾配に比例する $K(s)$ 、偏向磁石の偏向半径 r 、磁場誤差 ΔB とする。 $r(s)$ は偏向磁石が存在するところのみ r を取る。

運動量誤差、磁場誤差の存在の下で、粒子軌道を論ずる時この軌道を三分割 ($x(s) = \chi(s) + x_{cod}(s) + x_{eq}(s)$) するのが最も合理的である。 $\chi(s)$ は上記方程式の斎次の部分、摂動の加わらない理想的な方程式を満足する。この方程式をベータトロン振動方程式と呼ぶ。この軌道軸上で周期係数を持つ二階の線形微分方程式： $d^2x/ds^2 + K(s)x = 0$ が安定か否かは、強収束の原理が発見された1950年代初めにおいても、応用数学上は特に新しいことではなかった。この種の方程式を Hill 方程式と呼び、その解は振幅部が軌道軸 s とともにゆっくり変動する周期関数 $\rho(s)$ とほぼ一定の割合いで増加する位相 $\Psi(s)$ を持って変動する三角関数の積： $\rho(s) \sin \Psi(s)$ で記述できることが数学的に証明されている[1]。振幅部の関数をベータ関数 ($\beta(s)$) あるいはエンヴェローブ関数 ($\beta(s) = \rho^2(s)$) と呼び、補助方程式： $d^2\rho/ds^2 + K(s)\rho = 1/\rho^3$ を満足する周期関数である。 $\Psi(s)$ をベータトロン位相と呼び、ベータ関数で表現できることも証明されている：

$$\Psi(s) = \int_s^{s+C} 1/\beta^2(s') ds'. \quad \text{リング一周の phase advance:}$$

$2\pi\nu = \Psi(C_0)$ (C_0 : 周長) を 2π で除した量をベータトロン振動数と定義する。off-momentum 粒子 ($\Delta p/p \neq 0$) のベータトロン振動数は上記 ν からずれる。これは restoring 係数が $K(s)/(1 + \Delta p/p) = K(s)(1 - \Delta p/p)$ であることからベータ関数が上記 $\beta(s)$ からずれる結果である。ベータトロン振動数のずれを $\Delta\nu = \xi \Delta p/p$ で表現し、係数 ξ を natural chromaticity と呼ぶ。通常、負の値を取る。

ベータトロン運動自身は力学的には保存系ではないが、Courant-Snyder 不変量と呼ばれる力学不変量： $I(x,p) = [x^2 + (\beta'x/2 - \beta p)^2]/(2\beta)$ ($p \equiv dx/ds, \beta' = d\beta/ds$) が存在し、先のベータ関数と正準共役量 (x, p) で記述される。この不変量は独立変数に陽に依存する調和振動子の方程式の持つ一般的特徴として、1世紀以上前から数学者には Ermakov 不変量として知られていた[4]。しかし、役にたつ量として物理学者に認識されたのは強収束原理発見後の加速器物理の進化に伴ってであった。この不変量は位相空間 (x, p) 上で楕円として表わされる。 β が軌道の周期関数であることから、軌道 s が進むに従って、楕円が囲む面積を維持しながら、その形のみを変える。この面積を粒子エミッタンスと呼ぶ。同時に入射した粒子ビームの中で最大または定義した振幅を持つ粒子のエミッタンスをビームエミッタンスと呼び、区別する。

一方、 $x_{cod}(s)$ と $x_{eq}(s)$ は非斎次方程式： $d^2x_{cod}/ds^2 + K(s)x_{cod} = -\Delta B(s)/Br, d^2x_{eq}/ds^2 + K(s)x_{eq} = -(\Delta p/p)/r(s)$ をみたく。この2つの非斎次方程式の強制振動項が少なくとも加速器リング一周について周期的である事実から、非斎次方程式は周期解： $x_{cod}(s) = x_{cod}(s + C_0), x_{eq}(s) = x_{eq}(s + C_0)$ を持つ。前者を closed orbit distortion と呼び、後者を off-momentum 粒子の平衡軌道と呼ぶ。かくして、任意の粒子は中心軌道： $x_{cod}(s) + x_{eq}(s)$ の回りをベータトロン振動しながら閉じ込められるわけである。特に、 $x_{eq}(s)$ を $(\Delta p/p)$ で除した量を運動量分散関数 $D(s)$ と呼ぶ。 $x_{cod}(s)$ がリングを持つ理想的偏向磁石成分以外の諸々の成分に起因する中心軌道の歪みを表すのでリングのでき映えを示す最も重要な目安になる。 $D(s)$ は on-momentum からずれた粒子の規格化された軌道を表し、ラテイス設計 ($K(s)$ と $r(s)$ の強さと配列を決定する作業)の結果から一意に決まるので、設計段階で極めて重要な軌道関数の一つである。

Fig. 1 に KEK-12 GeV 陽子加速器 (PS) の軌道関数 (ベータ関数と運動量分散関数) を示す。加速器の磁石

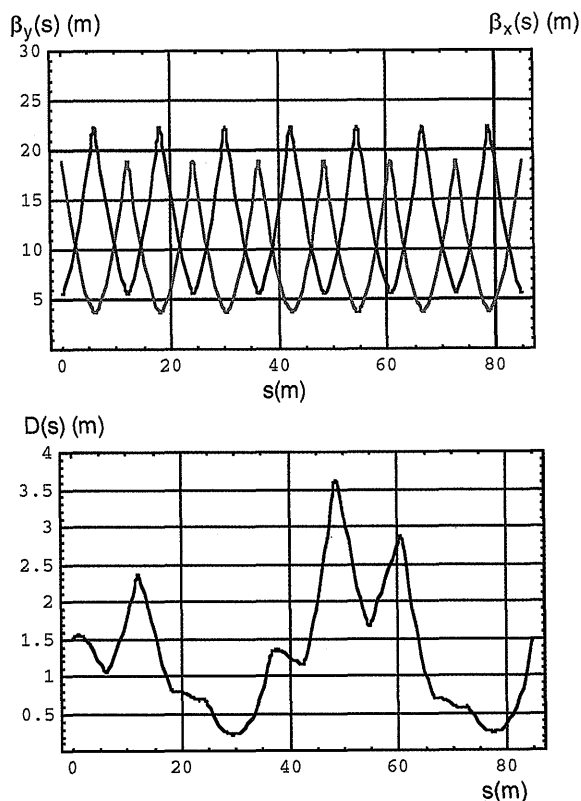


Fig. 1 Beta functions and momentum dispersion function for one super periodicity.

の配列を lattice と呼ぶが、KEK-PS はこの lattice が四階対称性 (super periodicity) を持つので、軌道関数も自ずとこの対称性を有する。KEK-PS は単純な FODO lattice 構造 (収束, 発散用四極磁石がドリフト空間を間に置いて周期的に並べられる) を取るので、図中に見られるようにベータ関数はさらに高い対称性を持つ。しかし、レプトンコライダでは衝突点でビームを極小に絞らなくてはならないことと、シンクロトロン輻射を補償するのに必要とされる dispersion free の長い RF セクションのためにアーク部を除くと lattice の構造はこんなに単純ではない。

2.3 位相安定性とシンクロトロン振動

粒子ビームを安定に望むエネルギーまで加速するためには、加速方向の安定性も非常に重要な要素である。円形加速器における RF 定在波加速では原理的にこの安定性が保証されていることから、これまで稼働した高エネルギー加速器の全部がこの加速方式を採用した。まず、加速の不連続モデルを考える。円周 C_0 の円形リングの一ヶ所に共振角周波数 ω_{RF} を持ち、電圧 V に励起され

た、ギャップ長の無視できる単一空洞を仮定する。粒子の縦方向の運動を記述する力学変数として、エネルギー E と粒子が空洞ギャップを通過する時の RF 位相 $\phi(\omega_{RF}t)$ を取る。空洞直前の位置を観測点にとると、周回ごとの力学変数の発展は、standard mapping [5] に類似の漸化式： $E_{n+1} = E_n + eV \sin \phi_n$, $\phi_{n+1} = (\phi_n + \omega_{RF} \tau_{n+1}) \bmod 2\pi$ (τ_{n+1} は $n+1$ 回目の周回時間) で記述できる。先に言及した一定の閉軌道 (周長 C_0) を周回する粒子を共鳴 (平衡) 粒子と呼ぶ。周波数 ω_{RF} は共鳴粒子の phase advance ($\omega_{RF} \tau_{n+1}$) が常に $2\pi h$ (h : 整数) になるよう、言い換えると一周あたりのエネルギーゲイン $eV \sin \phi_s$ が一定であるよう、加速とともに外部からコントロールしてやる。周回時間は粒子の周回距離を速さで除したものである。任意粒子の周回距離はエネルギーで決まり、共鳴粒子の運動量からのずれ ($\Delta p/p$) に比例する。任意の粒子の周長 C は $C = C_0(1 + \alpha \Delta p/p)$ で表される。 α は momentum compaction factor といわれる量で、磁石の配列がいったん決まると一意に定まる。また、速度もエネルギーの関数であるゆえ、周回時間あるいは phase advance ($\omega_{RF} \tau_{n+1}$) が $\Delta p/p$ の関数として表されることが理解される。結果として位相発展の式は $\phi_{n+1} = [\phi_n + 2\pi h (\alpha - 1/\gamma^2) \Delta p/p] \bmod 2\pi$ で表せる。

上式の () で括った項を phase slippage factor η と呼び、 $\gamma_T = 1/\sqrt{\alpha}$ をトランジションエネルギーと定義する。加速途上共鳴粒子のエネルギー γ が γ_T をクロスする時、すべての粒子の位相変化が凍結してしまうことがわかる。 $\gamma < \gamma_T$ ($\eta < 0$) の時、 $\Delta p > 0$ の粒子は位相を減らし、 $\Delta p < 0$ の粒子は位相を増やす。この場合、共鳴粒子の位相が $0 < \phi_s < \pi/2$ に選択されるならば、位相安定性が保証される。各粒子は位相空間 (ϕ, E) 上で共鳴粒子を中心とした反時計回りの回転を示す。一方 $\gamma > \gamma_T$ ($\eta > 0$) では、位相安定性を保証するためには共鳴粒子の位相を $\pi/2 < \phi_s < \pi$ に選ばばよい。これはビーム中心のエネルギーがトランジションエネルギーに達した瞬間に RF の位相をジャンプさせることで果たせる。この結果、粒子の運動はトランジションエネルギー以下のそれを時間反転したように振る舞う。

以上、粒子の縦方向の運動を総称してシンクロトロン振動と呼ぶ。不連続方程式を連続方程式で書き直した物が通常の加速器のテキストでは議論されるが、本質的な違いはない。

2.4 非線形共鳴

通常加速器を構成する偏向、収束電磁石の磁場成分は

本来の二極成分と四極成分以外に磁極の有限な大きさに起因する allowed multipoles と磁石自身の構造的非対称性に起因するその他の多極成分を持つ。このほか、磁石製造過程の製作エラーのために発生する多極成分や捻れ成分がある。これは当然、磁石ごとに異なる。結果として加速器全体に、様々な多極磁場成分がランダムに分布することになる。これらの非線形磁場の中では chromaticity 補正 (natural chromaticity をゼロ近くに動かすこと) のために装備する六極磁場成分が最大である。特に、大型の加速器ではこの六極磁石なしでの運転は実際上不可能である。このような多極成分がベータトロン運動に非線形共鳴を引き起こすことは強収束加速器の発明以来指摘されており、理論的解析とともに観測結果の報告が様々な場でなされてきた。この方面の研究は40年以上の歴史を持つ[6]。

一般にガイド磁場は次式のように x, y 座標の多項式で展開される。

$$B_y + iB_x = B_{\text{ref}} \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + i a_n)(x + iy)^n$$

B_y, B_x は各軸方向の磁場成分であり、 b_0, b_1, b_2 は二極、四極、六極成分の係数、 a_n は捻れ成分の係数である。四極以上の n 次の成分が非線形共鳴、 $l\nu_x + m\nu_y = k$ (l, m, k : 整数), を駆動するわけだが、 $|l| + |m| - 1 = n$ を満足する。このような非線形共鳴は Fig. 2 に見られる tune diagram と呼ばれる tune space (ν_x, ν_y) 上に直

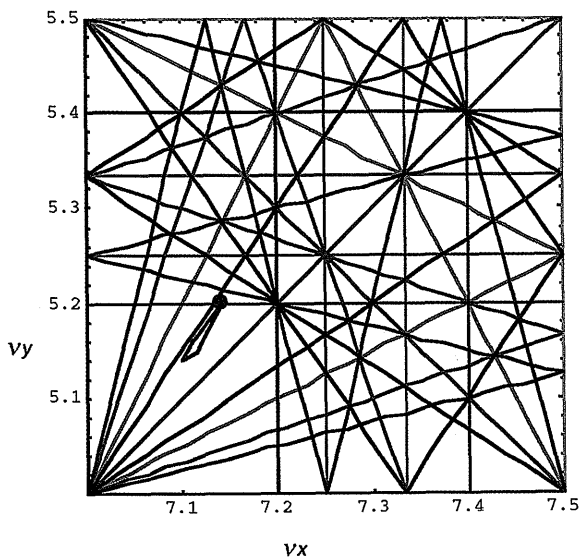


Fig. 2 Tune diagram (green: 2nd, red: 3rd, blue: 4th, black: 5th, ● : bare tune, ◇ : space-charge tune spread).

線で記述される。何らかの理由で周回する粒子のベータトロン振動数がこれらの直線に近接したり、直線をクロスすると、非線形共鳴を起こし、ベータトロン振動の振幅が急速に大きくなり真空容器から失われる場合もある。振幅が無限大まで成長するカタストロフィックな共鳴か有限な値に納まる共鳴かは非線形共鳴のタイプを数学的に分類することは可能である[6]。ベータトロン振動数自身は収束磁石の大きさだけで決まるわけではなく、非線形磁場の存在下では共鳴状態になくともベータトロン振動の振幅に依存する。したがって、粒子のエミッタンスの初期条件によって個々の粒子のベータトロン振動数は異なる。また、非線形共鳴の成長の段階では振幅が刻々と変化していくゆえ、必ずしも同じ非線形共鳴にトラップされているわけではない。Fig. 3 はリング上に置いた一つの八極磁石を励磁した時の位相空間における粒子軌道を示す。典型的な四次の非線形共鳴に起因する resonance islands が見てとれる。

実際の加速器運転にあたっては、収束磁石の磁場強度から決まる線形の operating point を共鳴線の疎なる領域に選択する。この線形の operating point が特定の共鳴線から十分に離れていても、先に述べた理由から、振幅の大きな粒子は共鳴の影響を強く受ける場合も起こり得る。摂動として受ける非線形磁場成分のオーバーオールな効果として決まる粒子軌道の安定領域に対応する位相空間の大きさを dynamic aperture と呼ぶ。この dynamic aperture が実際に粒子を閉じ込める磁石の aperture size ないしは真空容器の size から決まる mechanical aperture より大きいことが望ましい。線形の operating point を非線形共鳴線の近傍に選択すると、dynamic aperture が小さくなり、もはや真空容器内に

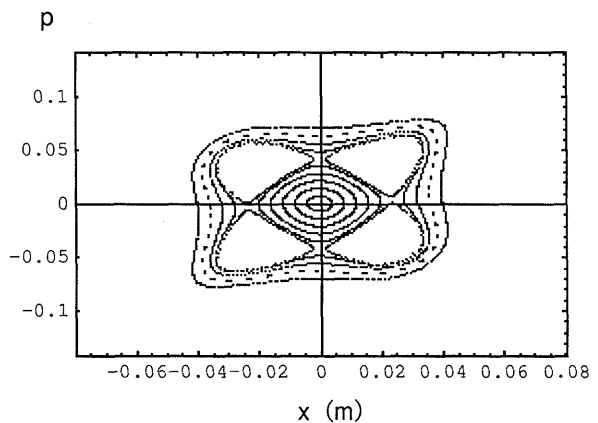


Fig. 3 Typical 4th-integer resonance.

from 0 (msec) to 2000 (msec), step 32.0 (ms)

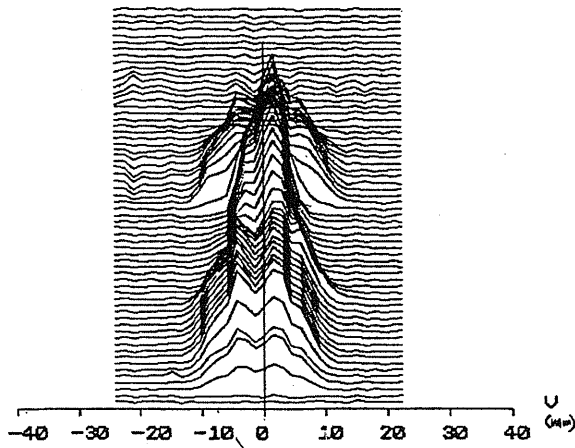


Fig. 4 Temporal evolution of the vertical beam size observed by the Non-destructive monitor.

広がった粒子群全部を安定に捕捉できないことになる。

Fig. 4 は入射から加速終了後まで、垂直方向のビームサイズの時間的推移を非破壊型ビームモニターで観測した結果を示す。加速途中で突然ビームサイズが増大している様子が顕著である。(1)垂直方向のベータトロン振動数 ν_y を同時帯に連続的にモニターした結果、問題の時間に ν_y が 5.25 近傍に滞留している。(2) ν_y を 5.25 から離してやると、ビームサイズが増大は起こらない。(3)横方向のビームサイズについてはまったく変動がない。以上 3つの事実から $4\nu_y = 21$ の 4th integer resonance による vertical emittance の増大が直接の原因であると結論づけられた。

以上の非線形共鳴の特徴自身はハドロン加速器、レプトン加速器にはよらない。しかし、電子、陽電子のコライダでは、粒子が偏向磁石を通過する際発生するシンクロトロン放射とそれを補正する RF 加速により横方向のエミッタンスの減衰と、シンクロトロン放射の量子励起による増大が同時に起こる。したがって、ビーム物理上は減衰項と統計的キックを受けた非線形共鳴として取り扱われる。

2.5 空間電荷効果

ビーム自身の電荷と電流密度が作り出す自己場である電磁場が、先に述べた純粋な外場に閉じ込められた粒子の平衡粒子の回りでの微小運動であるベータトロン振動とシンクロトロン振動に影響を及ぼす。これを空間電荷効果と呼ぶ。高エネルギー加速器におけるこの空間電荷効果は低エネルギー域にある粒子ビームのそれと趣を異

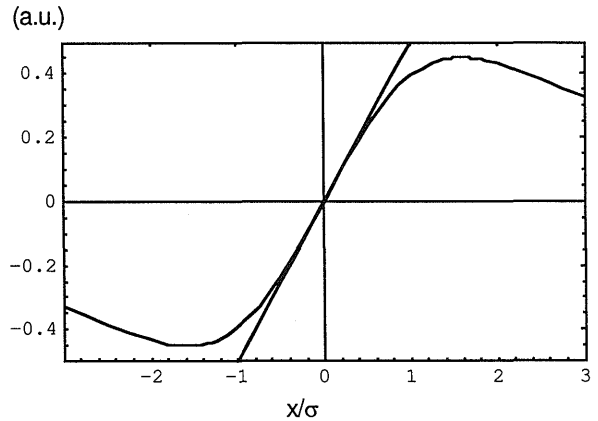


Fig. 5 Defocusing forces due to space-charge effects.

にする。なぜなら、平衡粒子の速度成分は $(v_z)_s \sim c$, $v_x, v_y = 0$ であり、他の粒子の運動がこの平衡粒子の回りの微小運動であることから速度成分は $v_z \sim (v_z)_s$ ($\langle v_z \rangle = (v_z)_s$), $v_x, v_y \ll v_z$ を満たしているからである。すなわち、粒子集団は光速に近い速さで一方向に運動しているので、電場 E による発散力がローレンツ力 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ に相殺される。結果、実効的発散力は E/γ^2 に比例し、超相対論的極限では完全に無視し得る。すなわち、トリスタンのような電子陽電子のコライダ ($\gamma = 1.6 \times 10^4 - 6 \times 10^4$) では自己場の直接的影響は無視できる。その反面、コライダ特有の相手側ビームの作る空間電荷力が問題となる。電場による収束力にローレンツ力が重畳されて衝突点のみで加わる周期的な外力となる。これをビーム・ビーム相互作用と呼び、円形、線形コライダにおける非常に重要なビーム物理のテーマである [7]。

Tune spread

実空間でガウス分布をしたビームを考えよう。Fig. 5 は空間電荷効果による発散力を示す。空間電荷効果による発散力は粒子の位置によって異なる。この発散力がベータトロン振動数の depression となり、その大きさはベータトロン振幅の関数となる。したがって、加速器内の粒子はすべて異なる tune を持つことになる。粒子分布を仮定すると、tune depression を数学的に導出することが可能である。まず、空間電荷効果をベータトロン運動が記述されるハミルトニアン (H) の中で摂動ポテンシャルの形で表現する。そして、作用変数 (エミッタンス I_x, I_y) 角変数 (ベータトロン位相 ψ_x, ψ_y) で表現し直されたハミルトニアンを加速器一周で平均 ($\langle H \rangle$) した後、角変数の正準方程式を求めれば、その摂動項が振幅に依存した tune depression に相当する、 $\delta\nu_x(I_x, I_y)$

$= \partial \langle H \rangle / \partial I_x - \nu_x$, $\delta \nu_y (I_x, I_y) = \partial \langle H \rangle / \partial I_y - \nu_y$. 原点近傍の粒子の tune depression が最大となり, ビーム全体の tune の広がり (spread) を表し, 強収束加速器の空間電荷効果を評価する上で重要な指標になる. Fig. 2 に KEK-12GeV-PS のニュートリノ振動実験の運転モード時の bare-tune とこの tune spread を表す.

Space-charge limit

強収束加速器では粒子を安定に閉じ込め得るか否かは粒子のベータトロン振動数の値による. 先の節で述べたように現実の加速器では, すべての点で完成時においてすでに設計どおりではない. また, 長期間の運転中に電磁石, RF 空洞, 入射/取り出し機器, モニタ等の加速器を構成する各ハード自身が加速器が乗った地盤の経日, 経年変化によって当初のアライメントからずれる. この結果前節で述べた closed orbit distortion (COD) が生じる. この COD の大きさが $1/\sin(\pi\nu)$ に比例するので, 整数に近いベータトロン振動数 ν を持った粒子の平衡軌道は真空容器の壁面に達し, 金属壁に衝突して失われることになる. 一般に平衡粒子 (on-momentum 粒子) であっても, そのベータ関数は四極磁石一台一台わずかに違う磁場勾配差があるゆえ, 理想的ベータ関数からずれている. また, off-momentum 粒子のそれは on-momentum 粒子の運動量からの差 $\Delta p/p$ に比例して, on-momentum 粒子のベータ関数からずれる. これらのずれのサイズが $1/\sin(2\pi\nu)$ に比例する. 各粒子のベータトロン振動の振幅が粒子自身のエミッタンスとベータ関数の積の平方で決まるゆえ, 半整数に近いベータトロン振動数を持った粒子の振動の振幅が真空容器の壁面に達し, やはりこの場合も金属壁に衝突して失われることになる. このように空間電荷効果として現われる平衡軌道とベータ関数への摂動から, 許される tune spread が自ずから決まる. すなわち, $0.0 < \Delta\nu < 0.5$ でなくてはならない.

このほかに現実の加速器に用いられる電磁石は必ず多極磁場成分を持つ. この多極磁場成分が非線形共鳴のソースであることは前節で述べたとおりである. 高次成分まで考慮すると tune space は Fig. 2 に示すとおり共鳴線は密に分布する. しかし, その強さは加速器, つまり電磁石のできいかんによるが, 一般に低次オーダーの共鳴が強い. 粒子ビームが tune spread を持つと, ビーム中のある粒子は必然的にこの共鳴線の上に位置することになり, 加速器への入射後そのような粒子のエミッタンス (振動の振幅) が大きくなる. 条件によれば, ビームロスにつながる. ビーム強度が大きい加速器では,

電磁石の非線形磁場に加えてビーム自身が作る空間電荷に起因する非線形電磁場が重要になる. 一般に加速器内での粒子は x, y 方向ではビーム中心に対して対称に分布する. したがって, 分布関数は x, y の偶数のべき関数となり, 対応する空間電荷ポテンシャルも必然的に x, y の偶数のべき関数である. そのような状況では二次と四次の共鳴が潜在的に危険な共鳴となる [8]. 特に, 四次の共鳴は先に見たように tune の端数が 0.25 近傍で重要になる.

以上の強収束加速器における非線形ベータトロン運動の特性より, 空間電荷による許される tune spread は $0.0 < \Delta\nu < 0.25$ でなくてはならない. 四極磁場による収束力に関係なく, 加速し得るビーム電流値がこの制限から決まることが特筆される. KEK-12 GeV-PS の入射段階 (500 MeV) で 4×10^{12} /bunch 程度と考えられている.

平衡分布

収束用の外場が軌道座標の陽の関数でない様な収束磁石系でのビームの分布には, 位相空間上での平衡解が存在する. それは外場と自己場の下で安定な分布である. 数学的には, 位相空間上の分布が, 自己場も含めた粒子のハミルトニアン関数の場合であれば, いかなる関数も平衡解になり得る. 実際, そのような関数が Vlasov 方程式を満足するのは自明である. この平衡解を運動量空間で積分すれば粒子の空間分布が得られる. 典型的例として連続線形収束系の一次元モデルで位相空間の分布がハミルトニアン関数の場合の空間分布を空間電荷効果を考慮したケースと考慮しないケースを対比して Fig. 6 に示す [9]. 当然, 2つの平衡解の差はビーム強度に比例して大きくなる. 複数の加速器で構成される現実の高エネルギー加速器コンプレックスでは上流加速器の平衡解と下流加速器の平衡解は異なる. そこではミスマッチした分布を持った粒子群が上流加速器の収束磁石系に入射されることになる. 入射後漸次平衡解に近づくことが計算機シミュレーションで確認されている. 異なる複数

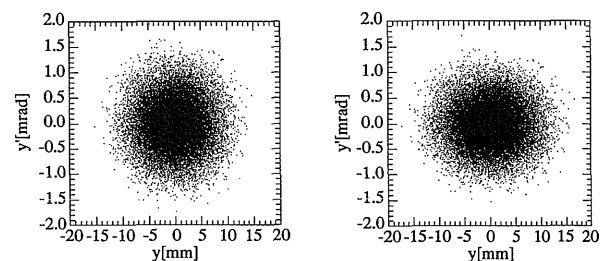


Fig. 6 Equilibrium distribution (left/right: without/with space-charge forces).

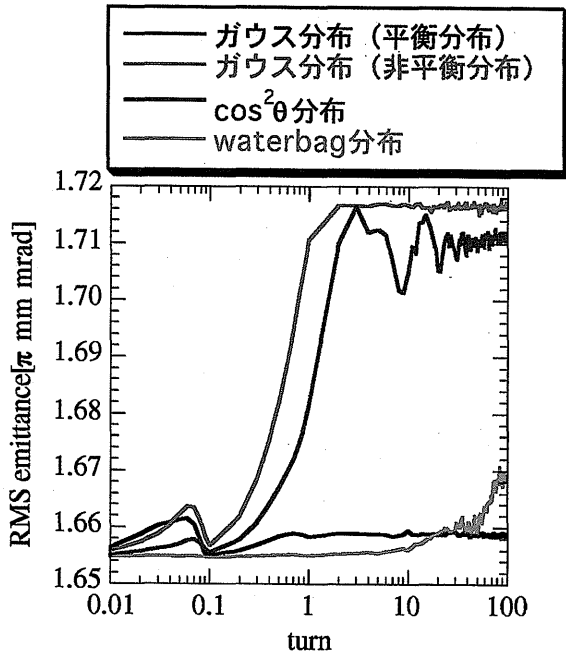


Fig. 7 Time-evolution of the rms beam sizes for different initial distributions.

の初期条件と落ち着く先の rms ビームエミッタンスが Fig. 7 に示される。示された計算例はガウス分布と位相空間でビームエッジまで一様に詰まった waterbag 分布と、これらの中間的分布に相当するビームエッジで粒子分布が連続的にゼロになる $\cos^2\theta$ 分布の 3 とおりである。通常、平衡分布とは時間的に不変な分布のことであるが、計算機シミュレーションで見える限り、入射後数ターンから 100 ターンの間にあるグローバルな意味での一定状態に達し、以後はその回りでの振動が続くことが確認される。

次に強収束加速器の不連続な収束系の場合には、元々収束用の外場が軌道座標の陽の関数であるから平衡分布の存在は自明ではない。しかし、空間電荷も非線形磁場成分も無視できる理想的な場合では、何ら再分布を促す要因はない。したがって、入射した粒子は位相空間上の Courant-Snyder の楕円上を収束磁石系から一意に決まる linear tune ν で動くわけだから粒子分布関数は軌道座標の周期解となる。その周期は mC ($1/\nu = m/n$: 規約分数, C : リング周長) にほかならない。入射した粒子分布の位相平面上での等高線が Courant-Snyder の楕円に等しい特別の場合 (matching 条件) には、この周期が C となる平衡分布が存在とするといえる。しかし、空間電荷が無視できない高強度の粒子ビームでは、上、下流の加速器、それらをつなぐビームトランスポートラ

インの収束磁石系の matching 条件を満足したとしても、ビームパラメータを含む広範な運転条件の下では粒子の再分布は不可避である。かくして、強収束加速器の不連続な収束系における平衡分布探査は計算機シミュレーションによる以外他に方法を見出せない。

ハロー形成

加速器本体の残留放射化の観点から、高強度のハドロン加速器では、管理された特定の箇所を除き、許されるビームロスはいわゆる hand-on-maintenance が可能なレベルまでというのが加速器社会のコンセンサスである。例えば、Japan Hadron Facility (JHF) [10] のような加速器でぎりぎり許される粒子ビームのロスは加速粒子総量の 10^{-4} のオーダーである。このオーダーのロスはビーム電流モニタ等では検出できないので、ロスの管理は実際相当厄介である。

ロスは粒子の横方向、縦方向エミッタンスが加速器の許容限界を超えた時に起きる。通常では、ビームのコアサイズは加速に従い断熱的に小さくなる。したがってロスはこのビームコアから直接起きるとは考えられない。ビームコアを取り巻く雲のような薄い粒子の層がロスに至る粒子の予備軍ではないかという描像が有力で自然である。ガウス分布のテールに位置する粒子群がその有力候補といえる。このテールに位置する粒子の規格化エミッタンスは入射時点のそれよりはるかに大きい。本来保存量であるはずのこの規格化エミッタンスが加速器入射後増加する原因はどのような加速器にも存在する。まず横方向については、真空チャンバ内の残留分子による散乱、先に述べたガイド磁場の捻れ成分や非線形成分に由来するカップリングや非線形共鳴、電磁石電源のドリフトやリップルによる tune の変動、加速空洞位置における non-zero 運動量分散関数に起因するベータトロン運動とシンクロトロン運動のカップリング、コヒーレントな不安定の影響等がある。縦方向については、空洞電圧や位相に乗ったノイズ/ジッターに起因する bucket shaking、加速空洞の動作条件が常にビーム自身の情報をフィードバックして設定されるゆえに起こるフィードバック系でのエラー/発振がある。どれが主要因かは加速器によって異なる。しかし、先に議論した空間電荷効果 (tune spread, 非線形共鳴, ビームコア breathing [11]) はビーム自身に起因するので高強度ビームの加速器ではハロー形成の普遍的な要因となり得る。

実際ハローがどの程度広がっているのか実験的に検出する手だてがないので、可能な要因を仮定した粒子トラッキング法によって粒子分布の時間発展を追う計算機実

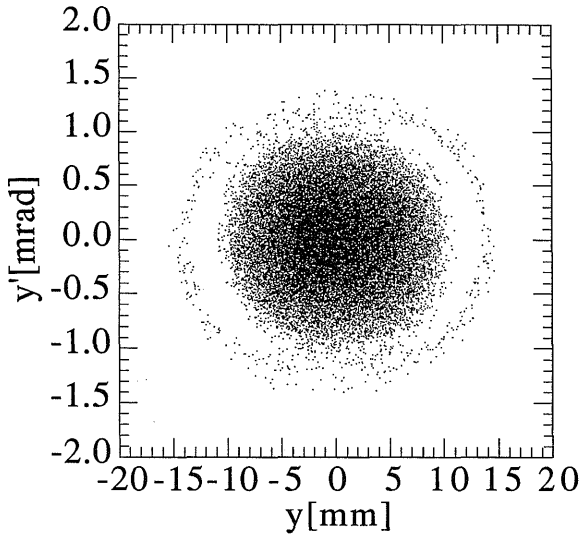


Fig. 8 Halo formation induced by nonlinear resonances.

験に頼る。 10^{-4} のオーダーのロスとハロー形成のメカニズムを信頼できる形で捉えるためには、少なくとも 10^6 のオーダーのマクロ粒子数を必要とする。また、ハロー形成時間に見合う周回数を確保しなければならない。KEK-12 GeV-PS では 1 msec で 10^3 ターンとなる。1 ターン中に粒子軌道を決定するエレメント数が 2×10^2 、空間電荷効果の不連続モデルに必要な bin サイズは概ね 1 cm であるので、1 ターンあたりの bin 数は 3.4×10^4 となり、膨大な計算時間を必要とする。Fig. 8 にビームエンベロープの振動に伴って駆動される偶数次オーダーの非線形共鳴に従ってハローが生成され、かつ粒子が継続的にフィードされる様子を示す。ビームコア部に位置する粒子が resonance islands の外周に沿って移動し、islands エッジ部に達している。一次元ではあるが、以上の現象に対して isolated resonance theory の観点から解析的な説明が試みられ、成功している [9]。

2.6 集団運動の不安定

Wake

荷電粒子と外界との電磁的相互作用の結果として粒子の運動エネルギーの一部が転化し、粒子が通過した後に電磁波として外界に残される。この電磁場を総称して wake 場と呼ぶ。個々の粒子が残す wake 場の位相がランダムであれば、残された wake 場が後続の粒子に与える影響は問題にならない。しかしながら位相が揃えば wake 場の正味の影響が増大して、後続粒子全体にはコヒーレントな外力となる。そして、このコヒーレントな

外力でビーム全体にコヒーレント運動成分が成長する。かくして、コヒーレント運動成分が位相の揃ったコヒーレントな wake 場を残すことになる。周回ビームの特性から、このコヒーレント相互作用が一気に成長していく構図を集団運動の不安定という [12]。

以下 KEK-12GeV-PS に見られる典型的な横方向の集団運動不安定である head-tail instability と縦方向の不安定 microwave instability を例にとって、不安定成長のメカニズムとその原因と救済策を紹介する。いずれも、つくばの KEK と岐阜県神岡の KAMIOKANDE を結んで今年度から開始されたニュートリノ振動実験 (<http://neutrino.kek.jp/index-j.html>) に必要な陽子のビーム強度 (6×10^{12} /cycle) を確保する上で、乗り越えなければならない KEK-12GeV-PS が抱えた重大な障害であった。

Head-Tail Instability (HTI)

名称が示唆するように、この不安定はバンチしたビームの上流部の残した wake 場が下流部のコヒーレントなベータatron運動に影響を与えることによって起こる。上流部と下流部はシンクロトロン振動によってメンバー交代をするので、結果的に wake を媒介としたバンチ全体の相互作用となる。有限な chromaticity ξ のためにバンチを構成する粒子個々のベータatron振動数が運動量に依存するので、かなり複雑な不安定である。

バンチの head と tail を模擬する2個のマクロ粒子を考える。簡単のため、ベータatron振動とシンクロトロン振動を調和振動子型と仮定する。ただし、ベータatron振動数は $\xi \neq 0$ ゆえ、シンクロトロン振動に従って時間とともに変動する： $\nu_{2,1} = \nu_\beta \pm (\xi z/c\eta)\omega_s \cos(\omega_s s/c)$ (ν_β : bare tune, z : シンクロトロン振動の振幅, ω_s : シンクロトロン角振動数)。wake として wake 発生後その大きさは時間的に一定 (W_0) だがバンチサイズを超えた伝達が無視できる head 粒子の変位に線形に依存する最も単純なケースでは、シンクロトロン周期の上半期 ($0 < s/c < \pi/\omega_s$ この間、粒子1は粒子2の前にあり)の間、粒子1は何の摂動を受けないが粒子2のベータatron振動は wake の影響を受けた摂動方程式： $d^2x_2/dt^2 + (\nu_2/c)^2x_2 = (Nr_0W_0/2\gamma C)x_1$ (N : マクロ粒子1の電荷, r_0 : 古典陽子半径) に従う。一般に $\nu_\beta/c \gg \omega_s$ であるので、WKB 近似解を用いてこの間の方程式の解を見出すことができる。下半期 ($\pi/\omega_s < s/c < 2\pi/\omega_s$) では粒子1と2の関係が逆転する。ここで力学変数 x_1, x_2 の代わりに $y_1 = x_1 + i(c/\nu_\beta)dx_1/dt, y_2 = x_2 + i(c/\nu_\beta)dx_2/dt$ を取ると、シンクロトロン一周期ごとの粒

子1, 2のベータトロン振動の成長が(2×2)の transfer matrix 形式で記述できる.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{2\pi C/\omega_s} = \begin{pmatrix} 1 & i\Gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\Gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 1 - \Gamma^2 & i\Gamma \\ i\Gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_0$$

$$\Gamma = \frac{\pi N r_0 W_0 c^2}{4\gamma C \nu_\beta \omega_s} \left(1 + i \frac{4\chi}{\pi} \right)$$

(head-tail phase: $\chi = \frac{\xi z}{c\eta}$)

かくして、多周期にわたるマクロ粒子の振動の成長は matrix のべき乗で決まる. その特徴は一周期あたりの transfer matrix の性質で一意に決まることを我々は知っている. transfer matrix は2つの固有値: $\lambda_{\pm} = \exp$

($\pm i\Gamma$)を持ち, 対応する固有ベクトル $V_+ = (+ \exp(i\Gamma/2) 1)^T$, $V_- = (- \exp(-i\Gamma/2) 1)^T$ が存在する. 固有ベクトル V_+ は粒子1, 2が同位相で振動する(+モード), V_- は位相が π だけずれて振動する(-モード)に当たる. 2粒子の重心 $x_1 + x_2$ がカストロフィックな不安定かどうかは結局(+モード)が安定か不安定かによる. 固有値の位相が $i\Gamma$ であることからの Γ の虚数部がベータトロン振動の growth rate: $\tau_{\pm}^{-1} \propto NW_0\chi/\gamma$ を与える. +モードは $\chi > 0$ で減衰, $\chi < 0$ で発散であることがわかる. $\chi = 0$ ($\xi = 0$)の時のみ安定である. そこで wake との正味の相互作用が起らないのは wake の位相の進みと後続の粒子のベータトロン振動の位相の進みが同じであるという, 力学上の単純な事実起因する.

Growth rate のパラメータ依存性からわかるように, この不安定が問題になる程度に成長するか否かは, 加速器の operation 条件によって決まる. いったんできあが

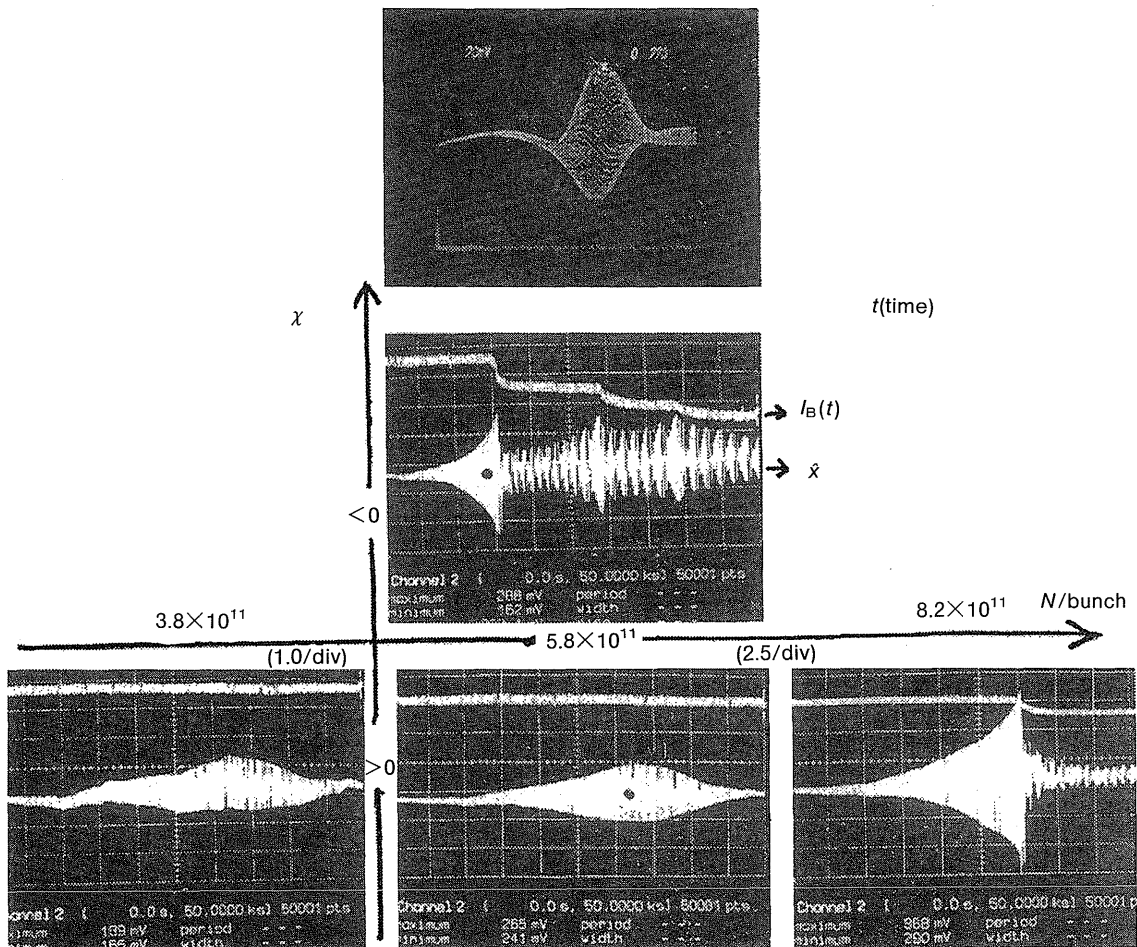


Fig. 9 Temporal evolution of the head-tail instability as a function of beam intensity and head-tail phase χ .

った加速器では、改造する以外 transverse impedance ($\propto W_0$) を変えることはできない。固定の impedance の下では、ビーム強度と chromaticity ξ の大きさがパラメータとなるが、この2つのパラメータを関数に head-tail instability によるビーム中心のベータatron 振幅の時間的に成長する様子を測定した結果が Fig. 9 に示される。Growth-rate がビーム電流とともに大きくなる当然の事実と、 ξ に比例する head-tail 位相 χ に対する敏感な応答が特筆される。とりわけその符号がこの不安定では本質的役割を果たす。最近まで、 χ がトランジションエネルギー以下 ($\eta < 0$) で正值を取ることが認識されていなかった。詳細な chromaticity 測定の結果、この不安定が発生する加速開始後 80 msec 近傍で正值を取ることがわかった。原因追及の結果、偏向磁石のギャップ間に置いた矩形断面のステンレス製真空容器に流れる渦電流起源の六極磁場成分が六極磁石でコントロールしている chromaticity 補正值を歪めた結果であることが判明した[13]。この不安定の対策としては、この六極磁場成分の粒子軌道に与える影響が一番大きな時間帯のみ標準装備の六極磁石によって補償するとともに、八極磁石を励磁してベータatron 振動数に拡がりを持たせ、不安定自身の直接的ランダウ減衰を行っている。

Microwave Instability (MI)

縦方向の集団不安定として、ハドロン加速器でしばしば観測される。最近まで、真空容器のグローバルな形状から決まる、共振周波数 GHz を持った Broad-Band Impedance (BBI) がこの不安定を駆動する原因であると考えられてきた。しかし、KEK-PS [14]と CERN-SPS [15]での系統的研究の結果、BBIではなくビーム周回軌道に多数存在するビーム位置モニタや空洞構造を持った特定の真空容器等の Narrow-Band Impedance (NBI) が主たる原因であることが明らかにされた。ここでは KEK-PS での観測結果とその解析について述べる。

この不安定はトランジションエネルギー通過 (TC) 後、短時間で劇的に成長する。Fig. 10 は TC 直前、約 1 msec 後、2 msec 後の典型的ビームパルスの形状を示す。TC 後のパルス中に見出される GHz オーダのマイクロ構造が MI の証拠である。オシロスコープで見える限り、TC 前には痕跡は確認されない。TC 直後からマイクロ構造はパルステールから成長を始め、それが時間の経過とともにパルスヘッドへと移動して、パルスの一部がパルスコアから離脱していく。結局、TC 後 10 msec 後に観測されるパルス幅の著しい増大から、この間パルスの縦方向エミッタンスが急速に増大したことがわかる。

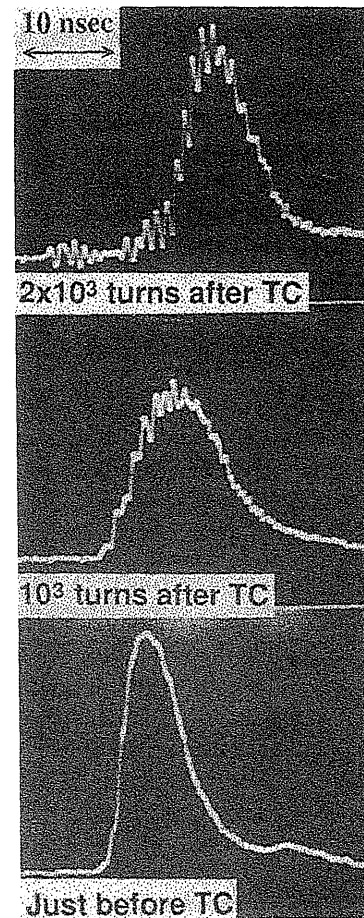


Fig. 10 Pulse shapes near the transition energy.

Fig. 11 にパルスあたりのビーム強度の関数として、TC 前後での縦方向エミッタンスの増大比を示す。ビーム強度に比例したエミッタンスの増大と飽和が確認できる。この飽和は粒子の一部が RF バケットのエッジにまで到達し、バケットからこぼれることを示唆する。このビーム強度依存性が KEK-PS ビーム強度増強計画の中で原理的障害となり我々の前に立ちはだかった。

なぜ TC 近傍でこの不安定が起きるかを定性的に理解することは容易である。TC 近傍ではシンクロトロン振動のグローバルな運動が停止する。これが NBI とパルス内高調波成分とのコヒーレントな相互作用を助ける。一方、TC から遠いエネルギー領域では、シンクロトロン振動のグローバルな運動が大きく、相互作用する粒子同士のメンバーチェンジが急速に起きて、コヒーレントな相互作用の発展を阻止すると考えてよい。その証拠に KEK-PS では TC 以外のエネルギー領域で MI が確認されることはない。また、resistive な impedance であれば、

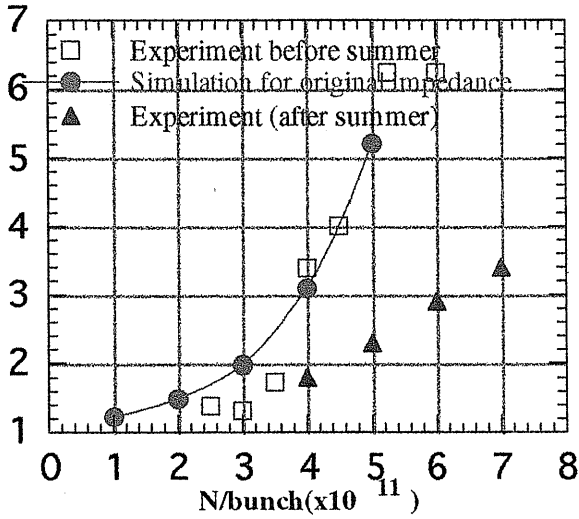


Fig. 11 Emittance blow-up ratio vs. beam intensity.

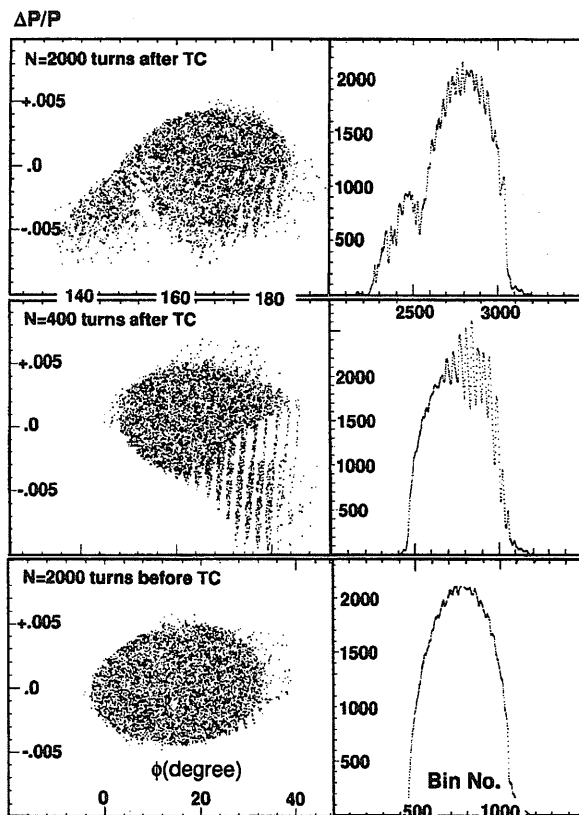


Fig. 12 Simulation results based on the klystron model.

原理的には TC 前後で顕著な差が出てくるはずがないのであるが、実際は TC 後で劇的な成長を示した。以上の現象を合理的に説明するべく、我々の手によって MI の Klystron Model (KM) が提唱され、KEK-PS の観測事実

と対比された[14].

KM では周回軌道に配置された複数の NBI を減衰を持った共振器と見なす Condon の等価モデルで記述する。数学的には、ビームの相互作用の相手である共振器でのマイクロ波の増幅をマイクロ構造に対応する AC 電流で励起される、減衰を持った調和振動子の力学で扱う。他方、粒子側は各共振器に蓄積したマイクロ波と直接エネルギーのやりとりをする。マイクロ波からエネルギーを得るか失うかは、粒子の共振器電場に対する入射位相に依存する。このモデルに基づいた計算機シミュレーションコードによる計算結果を Fig. 12 に示す。ここでは 10^6 個の粒子が仮定された。また、NBI としてリング全体で各々 56 個存在する wall-current type 位置モニタと約 1 GHz の共振周波数を持つ空洞構造の真空容器が特定された。テストベンチでの測定と MAFIA (solution of Maxwell's equations by Finite-Integration-Algorithm) シミュレーションの結果、これらは不安定を駆動するに十分な R_{shunt}/Q を持つことが確認された。

シミュレーション結果は TC 直後において位相空間のパルステール部に対応するところでの爆発的マイクロ構造の成長を示した。そこでは運動エネルギーの一部がマイクロ波に転化したため、マイクロ構造の重心は中心エネルギーより下に移動することになる。このプロセスが TC で起こる MI を被った粒子集団のその後の巨視的挙動を決する。すなわち、共鳴エネルギーの下、位相についてはパルステールに位置する粒子集団はシンクロトロン振動の巨視的運動に従って、マイクロ構造を残したまま位相空間内を初めゆっくり、だんだん早く時計回りに回転する。この結果、マイクロ構造を持った部分がパルスヘッド側に移る。その後、小振幅部の運動が共鳴エネルギーの上に移行した時点で RF バケットの外にまではみ出した粒子群では位相安定性は失われ、パルスコアから離れるとともに加速から離脱していくことになる。Fig. 10 と Fig. 12 を比較すると、時間軸に斜影したシミュレーション結果は実験事実を非常によく再現することがわかる。

以上の検討がなされた後、NBI の元凶と目されたビーム位置モニタと空洞構造真空容器全体の三分の二が低インピーダンス化された物に置き換えられた。残り三分の一は残留放射線レベルが高く、そのまま放置された。交換後、まったく同一のビームパラメータで TC 前後の longitudinal emittance 増大比が測定された。結果は Fig. 11 に示した。ほぼ予測どおりであった。

2.7 まとめ

限られた紙面で高エネルギー加速器のビーム物理の全体像を提示することは不可能であったが、多くの加速器で見られる普遍的テーマに焦点を当てたつもりである。そして、観測事実としては著者が日常的に接してきた KEK-12 GeV-PS の例を取って議論した。エネルギーフロンティアを追うハドロン加速器として、6年後に稼働を開始する LHC (7 TeV 陽子 x 7 TeV 陽子) (<http://www.lhc01.cern.ch/>) が以後20年間は独壇場の地位を維持するだろう。また、レプトン加速器としては電子、陽電子線形コライダ (<http://www-jlc.kek.jp/info-j.html>, <http://www-project.slac.stanford.edu/lc/nlc.html>) の建設が米国か日本で10年以内に開始されるだろうとみなされている。また、これらとまったく異質な加速器として、ミュオン蓄積リングをニュートリノファクトリとして位置づけ、KAMIOKANDE を始めとした地球表面上数箇所に分散するニュートリノ検出装置へ地球を貫通する方法で同時にニュートリノビームを供給する構想について、欧米日のグループによる検討が開始された (<http://mounstoragerings.cern.ch/Welcome.html/>)。ニュートリノファクトリでは、ミュオンがパイオンの崩壊の結果得られることから、大強度パイオンビームを作るために、一次ビームとしての大強度陽子ビームが必要とされる。かくして、しばらくは大強度ビーム物理が高エネルギー加速器社会でもトレンドとなるだろう。

参考文献

- [1] 亀井 亨, 木原元央: 加速器科学 (丸善, 1993).
- [2] 高山 健: 加速器物理入門, 高エネルギー加速器セミナー (加速器奨励会, 1992).
- [3] E.D. Courant, M.S. Livingston and H.S. Snyder, *Phys. Rev.* **88**, 1190 (1952).
- [4] V.P. Ermakov, *Univ. Izv. Kiev* **20**, No.9, 1 (1880).
- [5] B.V. Chirikov, *Phys. Rep.* **52**, No.5, 1 (1979).
- [6] 例えば, E.J.N. Wilson, *Advanced Accelerator Physics*, CERN Accelerator School, CERN 87-03 (1987) p.41.
- [7] 例えば, L.R. Evans and J. Gareyte, *Advanced Accelerator Physics*, CERN Accelerator School, CERN 87-03 (1987) p.159; K. Yokoya and Pisin Chen, *Lecture Notes in Physics 400, Frontiers of Particle Beams* (Springer Verlag, 1992) p.415.
- [8] A. Ando, T. Suzuki, E. Takasaki and K. Takayama, *IEEE Trans. on Nucl. Sci.* **NS-26**, 3541 (1979).
- [9] Y. Shimosaki and K. Takayama, *submitted to Phys. Rev. E* (1999), KEK Preprint 99-108.
- [10] JHF Accelerator Design Study Report, KEK Report 97-16 (1998).
- [11] 例えば, R.L. Gluckstern, W. Cheng, S.S. Kurennoy and H. Ye, *Phys. Rev. E* **54**, 6788 (1996); H. Okamoto and M. Ikegami, *Phys. Rev. E* **55**, 4694 (1997).
- [12] A.W. Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, Wiley Series in Beam Physics and Accelerator Technology (John Wiley & Sons, Inc., 1993).
- [13] T. Toyama, D. Arakawa, S. Igarashi, J. Kishiro, E. Nakamura, and K. Takayama, *Proc. of the 1999 PAC*, *in press*.
- [14] K. Takayama, D. Arakawa, J. Kishiro, K. Koba and M. Yoshii, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 871 (1997).
- [15] T. Bohl, T.P.R. Linnecar and E. Shaposhnikova, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3109 (1997).