



多体問題専用計算機 GRAPE の開発

戎崎 俊一

(東京大学教養学部)

(1993年3月1日受理/1993年3月30日改訂原稿受理)

Special Purpose Computer for Many-Body Simulations

Toshikazu Ebisuzaki

(Received March 1, 1993/revised manuscript received March 30, 1993)

Keywords:

special purpose computer, teraflop machine, gravitational many-body system, galaxy, black hole, cosmic background radiation, hydrodynamics, vortex, reconnection,

1. はじめに

われわれの研究室では、多体問題専用計算機 GRAPE (GRAvity PipE) の開発を進めている [36]。私は宇宙地球科学教室に属しており計算機の専門家ではない。銀河や球状星団などのたくさんの恒星が互いの重力で引き合ってきた重力多体系を研究する天文学者である。われわれが GRAPE を作り始めた動機はこの重力多体系のシミュレーションを飛躍的に加速することだった。しかし、GRAPE は重力多体シミュレーションだけでなく、結晶やタンパク質などの分子の集合体の分子動力学シミュレーションや渦糸法を使った非圧縮性流体のシミュレーションにも使えることがわかってきた。

重力多体系は銀河や球状星団などたくさんの質点が集まってお互いの重力で引きつけ合っている系である。重力多体系はニュートンの運動方程式

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_j}{dt^2} = \mathbf{a}_j \quad (1)$$

とニュートンの万有引力の式

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^N \frac{Gm_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \quad (2)$$

で支配される。プラズマなどのクーロン系に対する重力多体系の違いは、クーロン力には斥力と引力があって打ち消し合うのに対し、重力には引力しかないので打ち消し合わず遠くまで届くことである。また、プラズマには量子力学的な効果で原子の大きさに下限があるのに対し、重力多体系では大きさの下限が実際上ないことも大きな違いである。例えば、球状星団内の平均星間距離は 10^{15}m 程度なのに対し、典型的な恒星の半径は 10^9m 程度と6桁も小さい。系の大きさに比べると恒星は質点と思って良い。このため、典型的な近接連星系の単位質量あたりの束縛エネルギーは典型的な星団全体より遥かに大きい。

これらの理由から重力多体系は非線形で非平衡な振る舞いを示し、解析的なアプローチが余りう

まく行かない。したがって、重力多体系の計算は、実際にたくさんの粒子間の力を計算し、その軌道を追いかける重力多体シミュレーションによってもっぱら研究が進められてきた。

ところが、この重力多体シミュレーションは膨大な計算パワーを必要とする。それは重力が遠距離まで到達するので、式(2)の右辺の和は全ての粒子について計算しなければならないからである。 N 個の粒子の力を計算するために $O(N^2)$ の計算量を必要とする。例えば、典型的な銀河の進化の計算は最高速のスーパーコンピューターを使っても粒子数は数万個に限られてきた。一方、現実の銀河を作っている恒星の数はもっと多い。例えば、銀河は典型的には 10^{12} 個の恒星の集まりである。 $N = 10^{12}$ のシミュレーションはとても無理としても、100万個ぐらいの粒子がないと重力多体系の三次元構造の進化を明らかにして、銀河などの観測と比較することができない。そのためには現在のスーパーコンピューターより100倍速いテラフロップス(毎秒 10^{12} 回演算)ぐらいの演算速度を持つ計算機が必要になる。ところが、市販の計算機が実効速度でテラフロップスに到達するのは、楽観的にみても西暦2000年である。われわれは本当に西暦2000年まで待たなければならないのだろうか。

しかし、この計算パワーの問題を解決するうまい手がある。重力多体シミュレーションの計算時間のほとんどは重力計算に費やされている。したがって、重力計算が高速に処理できれば他の計算は遅くてもよい。われわれはこの点に着目し、重力計算だけを非常に高速に行うハードウェア GRAPE (GRAvity PipE) を開発している[35]。図1は GRAPE の基本概念を表している。GRAPE はホスト計算機と協力して計算を行う。ホスト計算機には市販のワークステーションやパソコンを用いる。ホスト計算機がインターフェースを通じて粒子の位置と質量を GRAPE に送る。GRAPE はそれを使って、各粒子に働く重力を計算し、ホスト計算機に送り返す。ホスト計算機はこの力を使って粒子の位置を更新する。1ステップあたり GRAPE が $O(N^2)$ の計算を行うのに対

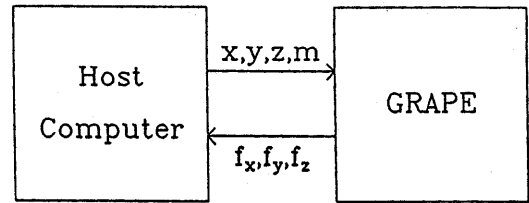


図1 GRAPE の基本概念

し、ホスト計算機が行う計算やインターフェースが送るべきデータの量は $O(N)$ である。したがって、 N が非常に大きいときホスト計算機やインターフェースのスピードに足を引っ張られずにシステムの計算速度を向上することができる。

GRAPE はパイプライン方式で重力を計算する。パイプラインでは仕事をいくつかのユニットに分割して割当て、1クロック毎に流れ作業でたくさんのデータに対して同じ処理を行う。つまり、1つのユニットは前段のユニットから新しいデータをもらって、自分の担当の処理を行い、次のユニットに渡すことを1クロック毎に繰り返すわけである。分割した数(パイプライン段数)に対応した時間の後は、1クロック毎に計算結果が現れる。パイプライン段数よりもデータ数が十分に大きければ全てのユニットがフルに並列動作したことになり、ユニット数に比例した計算速度が得られる。パイプライン方式は同じ処理をたくさんのデータに施す重力計算には理想的な計算方式である。パイプラインの原理は1910年代に H. フォードが自動車の生産に使用して大幅なコストダウンを実現し、製造業に革命を起こした流れ作業による製造ラインの原理と全く同じである。

1989年4月に開発をスタートして半年後、9月に最初の GRAPE システム GRAPE-1 を完成させた[35,19]。GRAPE-1 の製造コストは約20万円と安いにもかかわらず、その性能は初期のスーパーコンピューターに匹敵し、GRAPE の概念の有効性を示した。その後の4年間に5つの違った GRAPE システムを開発した。GRAPE は大きく高精度型と低精度型に分けられる[6]。低精度型は個々の粒子による散乱が重要でない無衝突系のシミュレーションに用いられる。無衝突系のシミュ

ュレーションでは力の計算にそれほど精度が必要ないことが分かっている[30]. 語長が短い低精度型は製作費が安く, 作るのが簡単である. 無衝突系では低精度でも計算できることを発見したが, GRAPE 開発成功の鍵となった. 高精度型の GRAPE は個々の粒子の重力による他の粒子の散乱が重要な衝突系のシミュレーションに用いられる. これら衝突系のシミュレーションでは近接散乱を正確に計算する必要があるため, 高い精度が必要である. 90年5月には高精度型の最初のシステム GRAPE-2 完成させた[20].

1991年には低精度型の重力計算パイプラインを納めた専用 LSI を富士ゼロックス電子技術研究所と共同で開発し, これを48個並列接続した GRAPE-3 を開発した[31]. その最高速度は15Gflops に相当する. また, 高精度で任意関数形の中心力を計算できる GRAPE-2A を開発した[21]. GRAPE-2A は重力の他に原子の間に働くファン・デア・ワールス力や周期的境界条件を課したときに現れる Ewald 力も計算できるので, タンパク質や結晶の分子動力学シミュレーションにも使用できる. また, それと同時に, われわれは周期的境界条件付きの粒子シミュレーションを GRAPE と協力して加速する WINE (Wave space Integrator for Ewald method) [12] や数値流体シミュレーション用の専用計算機 DREAM (Disk REsource Array Machine) [27,32] などさまざまな専用計算機も同時に開発している.

本稿ではまず, 重力多体系には衝突系と無衝突系の二種類が存在することを述べ, それに対応して高精度型と低精度型の二種類の GRAPE があることを述べる. 3, 4, 5節ではそれぞれ GRAPE -3 と GRAPE-2 および 2A, さらに WINE-1 の機能と応用について解説する. さらに, 現在開発中のテラフロップスマシン GRAPE-4 について簡単に触れる. GRAPE-1 については, 前に解説記事を書いているのでそちらを参照して欲しい[2,3].

2. 衝突系と無衝突系

重力多体系は大きく衝突系と無衝突系に分けられる. ここで言う衝突とは実際に星同士が衝突す

ることではなく, 個々の星の重力によって他の星が散乱されることをいう. 球状星団や銀河の平均星間距離は星の大きさよりずっと大きいので, 第一近似では物理的に衝突する確率は無視できる.

衝突系では二体重力散乱により星同士がエネルギーを交換することで熱が輸送され系が進化する. ここで熱とは系内の星の乱雑な速度のことを指す. その熱的な二体緩和の時間尺度 τ_{2b} は自己重力系の場合,

$$\tau_{2b} \sim \frac{N}{30 \ln N} \tau_{cr} \quad (3)$$

で与えられる[34]. ここで, N は系を構成する粒子の数, τ_{cr} は典型的な粒子が系を横断する時間尺度である. たくさんの粒子で構成される系では τ_{2b} が τ_{cr} に比べて長くなる. これはちょっと考えると変かも知れないが, 全体の重力ポテンシャルに対する個々の粒子の重力ポテンシャルが相対的に小さくなると考えれば納得できる. または, たくさんの粒子を持った系ほど, 系内の典型的な軌道速度が大きくなるので重力散乱の断面積が相対的に小さくなると考えても良い. これはポテンシャルが打ち消し合わない重力多体系の大きな特徴である.

この二体緩和の時間尺度を典型的な重力多体系である球状星団と銀河について見積もると, 表1 のようになる. つまり, 球状星団の二体緩和の時間尺度は $10^8 \sim 10^9$ 年で, 宇宙の年齢 ($\sim 10^{10}$ 年) よりも短い. 球状星団はわれわれの銀河に200個ほど見つかっている. これらは宇宙初期, 形成中の銀河でできた天体である. その年齢は宇宙年齢とほぼ等しく, 二体緩和の時間尺度よりずっと長い. つまり, 球状星団は衝突系である. 衝突系では重力熱力学のカタストロフと言われる一種の不安定が発生し, コアが収縮して中心密度がどんど

表1 銀河と球状星団の横断時間と二体緩和時間

	粒子数 N	横断時間 τ_{cr}	二体緩和時間 τ_{2b}
球状星団	$10^5 \sim 10^6$	$\sim 10^5$ 年	$10^8 \sim 10^9$ 年
銀河	$10^{11} \sim 10^{12}$	$\sim 10^8$ 年	$10^{17} \sim 10^{18}$ 年

ん上昇することが知られている。二体緩和時間の10倍ほどたつと中心密度が非常に高くなり、その中で三体衝突が起こるようになる。三体衝突の結果、そのうち二体がより強く結合し、もう一体がその束縛エネルギー分をもらって飛び出す。系全体からみるとエネルギーが発生したように見える。これは、原子同士が結合してエネルギーが発生するのと同じである。原子の場合と違うのは、量子力学効果で原子のサイズに下限があるのに対し、重力には下限が実際上ないことだ。太陽程度の星がくっつくほどに接近した近接連星系の単位質量あたりの束縛エネルギーは星団全体の千倍もある。エネルギー発生が十分に起こると中心核は膨張に転ずる。この膨張がある程度進むと、また中心核は収縮に転ずる。典型的な球状星団はこの様な重力熱力学的な振動を数回経験していると考えられている。

この様な重力熱力学的振動の結果、球状星団の中心には強く結合した連星系が異常にたくさんできる。実際、球状星団の中心にはミリ秒パルサーや低質量エックス線連星など、近接連星系を起源として生まれたのではないかと推測されている特異な天体がたくさんあることが知られている。

また、衝突系では重たい粒子が軽い粒子との相互作用でエネルギーを失って、中心に落ち込むことが知られている。この現象は質量分離と呼ばれている。この質量分離がどれくらいの時間尺度で起こるのかまだよく分かっていないので、シミュレーションで調べる必要がある。現実の球状星団内の中性子星やブラックホールは周りの普通の星に比べると2から20倍重たい。もし、球状星団の中でこの質量分離が起これば、球状星団の中心にはブラックホールや中性子星ばかりあることになる。さらに銀河の潮汐力で外側の部分がはぎ取られるような場合には、ほとんどブラックホールや中性子星でできた暗黒星団が後に残る可能性もある。

この様な衝突系のシミュレーションでは近接衝突を正しく計算する必要がある。また、衝突系の進化の結果できる小さなコアを分解しなければならない。このため、力は高精度で計算しなければ

ならない。衝突系の計算は高精度型の GRAPE-2 および GRAPE-2A を使って計算してきた。

一方、銀河の二体緩和時間は 10^{17-18} 年と宇宙の年齢よりずっと長い。つまり、銀河では二体緩和は無視できる無衝突系である。したがって、銀河同士が衝突・合体したり、力学的不安定が内在していない限り銀河は進化しない。ただし、二体緩和が無視できるので、粒子の分布関数はマックスウェル分布から遠くずれる。典型的な銀河は 10^{12} 個ぐらいの粒子から構成されている。これを全部入れてシミュレーションするのはとても不可能である。そこで系を有限個の粒子で代表させることを考える。このとき、シミュレーションに使う粒子は現実にはたくさんの粒子をまとめて表現する超粒子である。系はこの様な超粒子の重ね合わせで表現される。超粒子間の重力は式(2)を少し変形して

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^N \frac{Gm_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 + \varepsilon^2]^{3/2}} \quad (4)$$

で計算する。ここで、 ε は超粒子の大きさを表すソフトニングパラメータである。ソフトニングパラメータはシミュレーションの空間分解能に対応している。普通、系の平均超粒子間距離ぐらいの値を用いる。もちろん、たくさんの粒子を少数個の粒子で表現すればシミュレーションの精度が悪くなる。まず、空間分解能が悪くなる。また、粒子数が少ないので式(3)にしたがって二体緩和の効果が人工的に増加してしてしまう。逆に言うと、この様な誤差が必然的に混入してくるので、力を精度良く計算してもあまり意味がない。そこで、無衝突系のシミュレーションは低精度型の GRAPE-1, GRAPE-3, GRAPE-3A で行ってきた。

低精度型 GRAPE は高精度型に比べると、語長が短いので格段に安くできる。また、配線やデバッグの手間もずっと少ない。それで、われわれはまず低精度型でいろいろな新しい実験を試み有効性を確かめたあとで、高精度型を作ってきた。この戦略はこれまでのところたいへんうまく行っている。低精度でも銀河シミュレーションに使えること発見したことが GRAPE 成功の鍵となった。

3. GRAPE-3

GRAPE-3は低精度型 GRAPE の3号機である(図2) [31]。富士ゼロックス電子技術研究所と共同で重力計算パイプラインを一つのLSIに納めた GRAPE チップを開発した。図3は GRAPE チップのブロック図である。粒子の位置座標がメモリチップに格納されている。カウンタの値が1クロック毎に1つ増えるにつれて、ひとつずつ i 粒子の位置座標が出力され、GRAPE チップに供給される。GRAPE チップは、まずチップ内のレジスタに書かれている j 粒子の座標との差をとる。その後流れ作業で式(4)の値を計算し、それを積算をする。最初の引き算は20ビット固定小数点形式で最後の力の積算は56ビット固定小数点形

式、その他は11ビット対数形式で計算している。それぞれのステージにおける語長と表現形式は詳しい誤差解析を行って、無衝突系のシミュレーションには十分で、使うトランジスターが最小になるよう決定した。図4は GRAPE チップのマスクパターンである。約11万トランジスターが8ミリ角のサイズに納められている。

GRAPE チップを24個の36.7cm × 40.0cm のボードの上に並列接続した。このボード2枚を VME (Versa Module Europa) バスでホスト計算機(住友電工のワークステーション U-300)に接続した。全体で48LSIが並列接続されていることになる。GRAPE チップは1クロックに約30演算に対応する演算操作を行っている。GRAPE-3では10MHzのクロックを使っているので、チップ1個あたり10MHz × 30 = 300Mflops 相当の性能となる。48個全部がフルに働いたときの最高速度は14.4Gflops となる。20万体の重力多体シミュレーションに対して10Gflops 相当の実効スピードを記録した。最高速度との差はホスト計算機とのインターフェースの時間によるものである。

この GRAPE-3 を使って銀河のシミュレーションを行った。そのいくつかを紹介しよう。図5は2つの円盤銀河が衝突・合体する様子を示している [15]。1つの円盤は8192個の粒子で作られてい

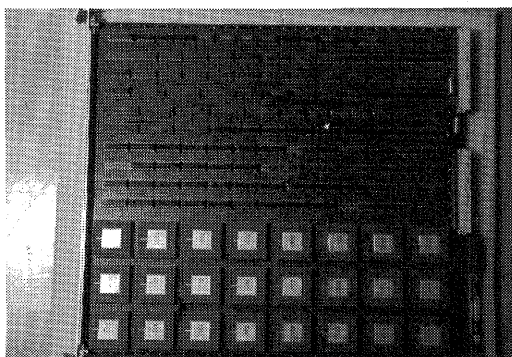


図2 GRAPE-3ボード

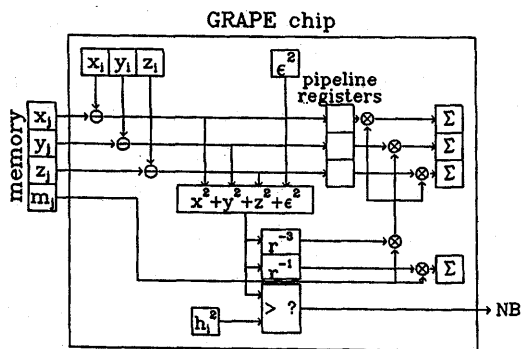


図3 GRAPEチップの構造

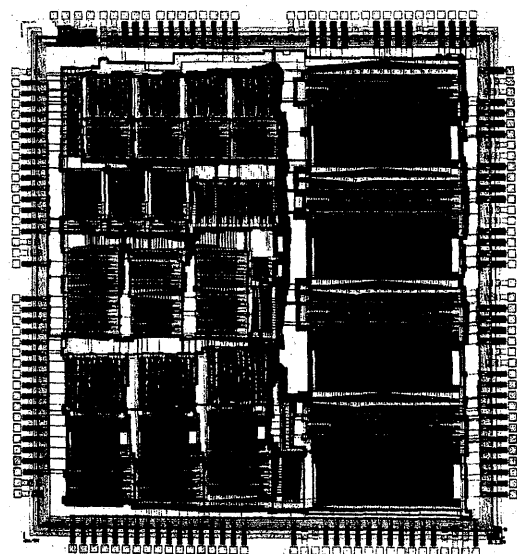


図4 GRAPEチップのマスクパターン

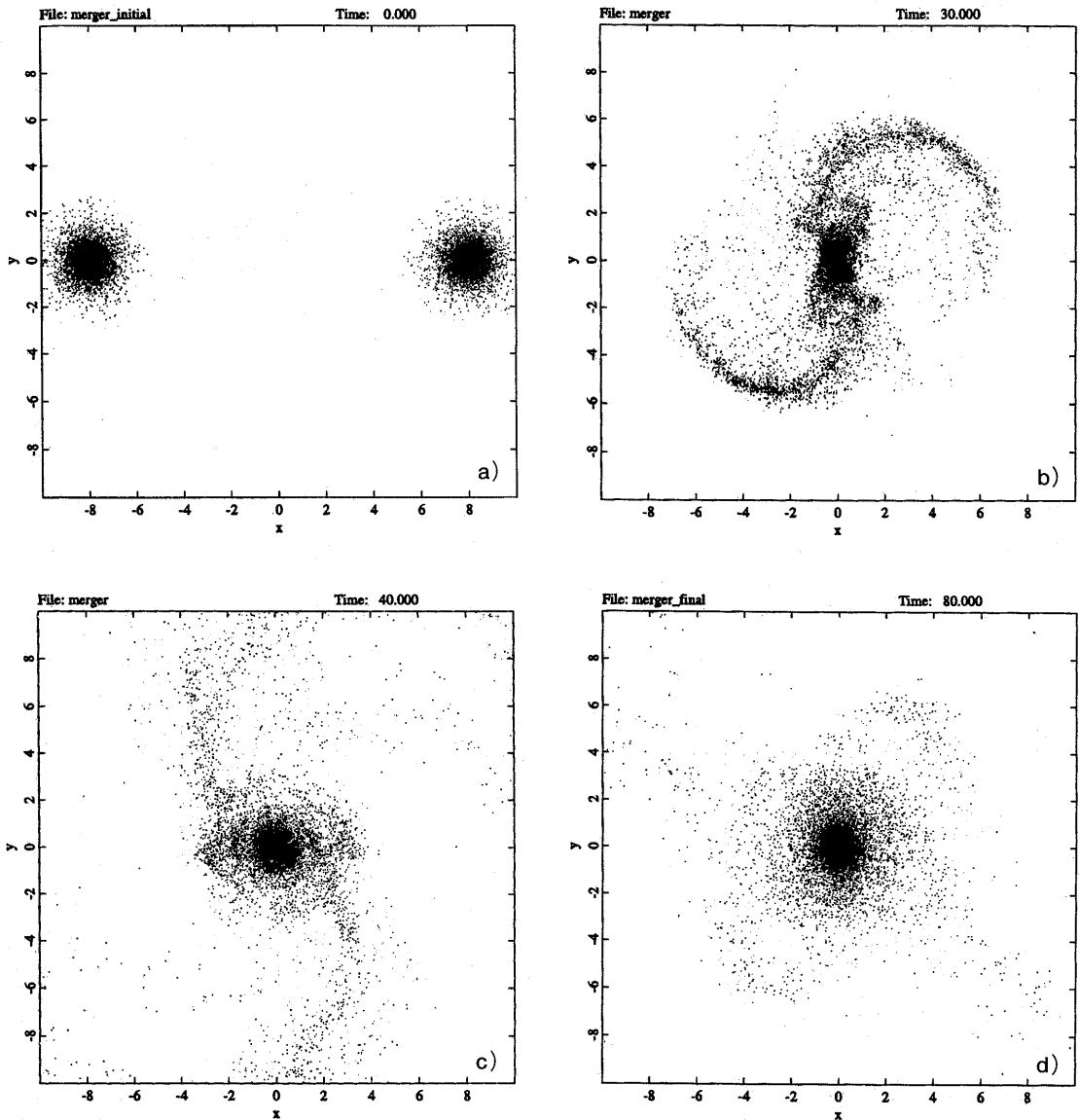


図5 円盤銀河の合体のシミュレーション a) 初期条件
 b), c) 潮汐力で円盤が破壊され潮汐腕が形成される
 d) 合体して楕円銀河になる

る (図 5a)。この円盤のまわりに同数のハロー粒子が球状にとりまいている。ここではハロー粒子は表示していない。衝突の途中で、円盤が互いの潮汐力で破壊され、潮汐腕と呼ばれる渦巻状の腕が形成される (図 5b, c)。最終的には潮汐腕も次第に薄くなり、最後には楕円状の星の集まりが残る (図 5d)。楕円銀河はこの様にして、円盤銀河

の合体によってできたとする説が最近有力になってきている [39,4]。

図 6 は 96 個の銀河団のシミュレーションである [14]。図 6a は初期条件を表している。512 個の粒子でできた軽い銀河を 64 個と 1024 個の粒子でできた重い銀河 32 個を適当な速度分散を持たせて置いた。図 6b は銀河団の横断時間の 5 倍は

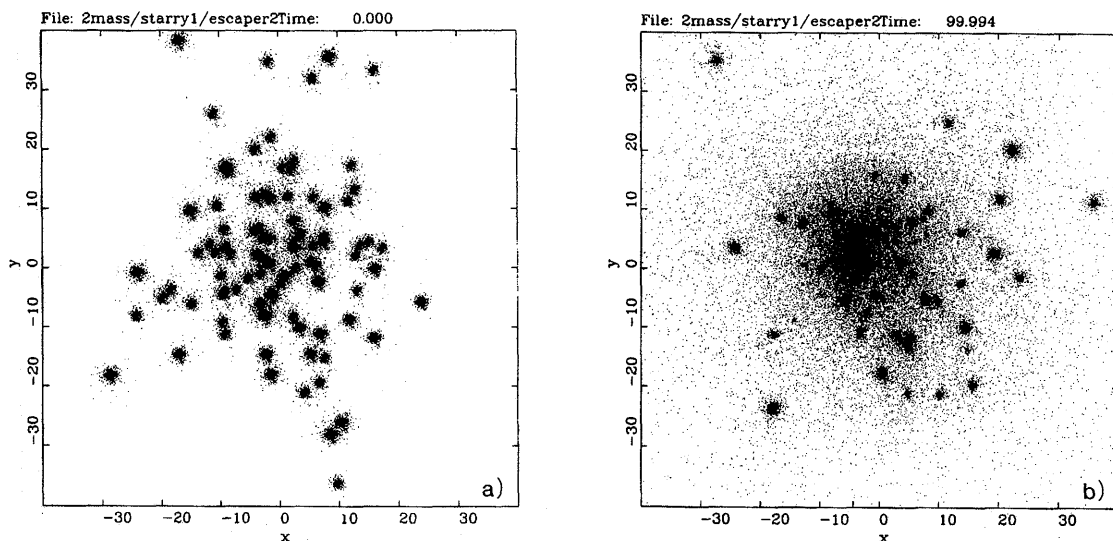


図6 銀河団の合体のシミュレーション a) 初期条件 b) 銀河団の横断時間の5倍後. 銀河に属していた粒子が銀河同士の合体ではぎ取られて, 銀河団全体に広がる. このはぎとり効果は銀河団の中心ほど強い. 銀河団の中心には数個の銀河が合体してできた巨大銀河が座っている.

ど後の様子を表している. 銀河団の中心には, いくつかの銀河が合体してできた巨大銀河が座っている. この場合, 銀河の相対速度が銀河の重力ポテンシャルに対して大きいので銀河はなかなか合体しない. 銀河同士の衝突で, 銀河の外縁部にあった粒子がはじき飛ばされて銀河から逃げだし, 銀河団全体に広がった共通のハローを作る. この様子はぎ取りの結果, 中心部近くにある銀河ほど速く小さくなる. この様な傾向は実際に宇宙に存在する銀河団でも観測されている.

また, GRAPE-3を使って, 非圧縮性流体のシミュレーションをする事ができる[17]. 非粘性非圧縮性流体では渦度が保存するので, 渦度を持った粒子の運動をラグランジュ的に追いかけることにより系内の流体の流れの発展を調べることができる. この様な渦糸法を使った流体計算で最も大変な部分は与えられた渦度の分布からビオ・サバルの法則:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (5)$$

を使ってある場所 \mathbf{r} の速度 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ を求める計算で

ある. ここで $\boldsymbol{\omega}_i$ は i 粒子の渦度ベクトルである. GRAPEはこの計算も行うことができる. ベクトル $\boldsymbol{\omega}_i$ の3成分を質量と置いて, 3次元GRAPEを使うと式(5)に必要な和を求めることができる. 図7はGRAPE-3で行った4個の渦輪の相互作用のシミュレーションである. 同じ平面上にある4個の渦輪がリコネクションして大小2個の渦輪を作る. 外部の輪は上に, 内側の輪は下へ運動してゆく. 図7aは4個の渦輪の初めの位置を表している. 図7bは渦輪が接近して今まさにくっつくとしている瞬間である. 図7cはほぼリコネクションが終わっている. これ以降は外側のリングと内側のリングが複雑な運動をしつつ外側は上に内側は下に動いている様子が見られる. 内側のリングでは不安定性が成長し始めている. リコネクションがあった部分の渦糸素片は2つがペアを作っている. この計算結果は実験室で観察される4個の渦輪のリコネクションの様子を良く再現している[33].

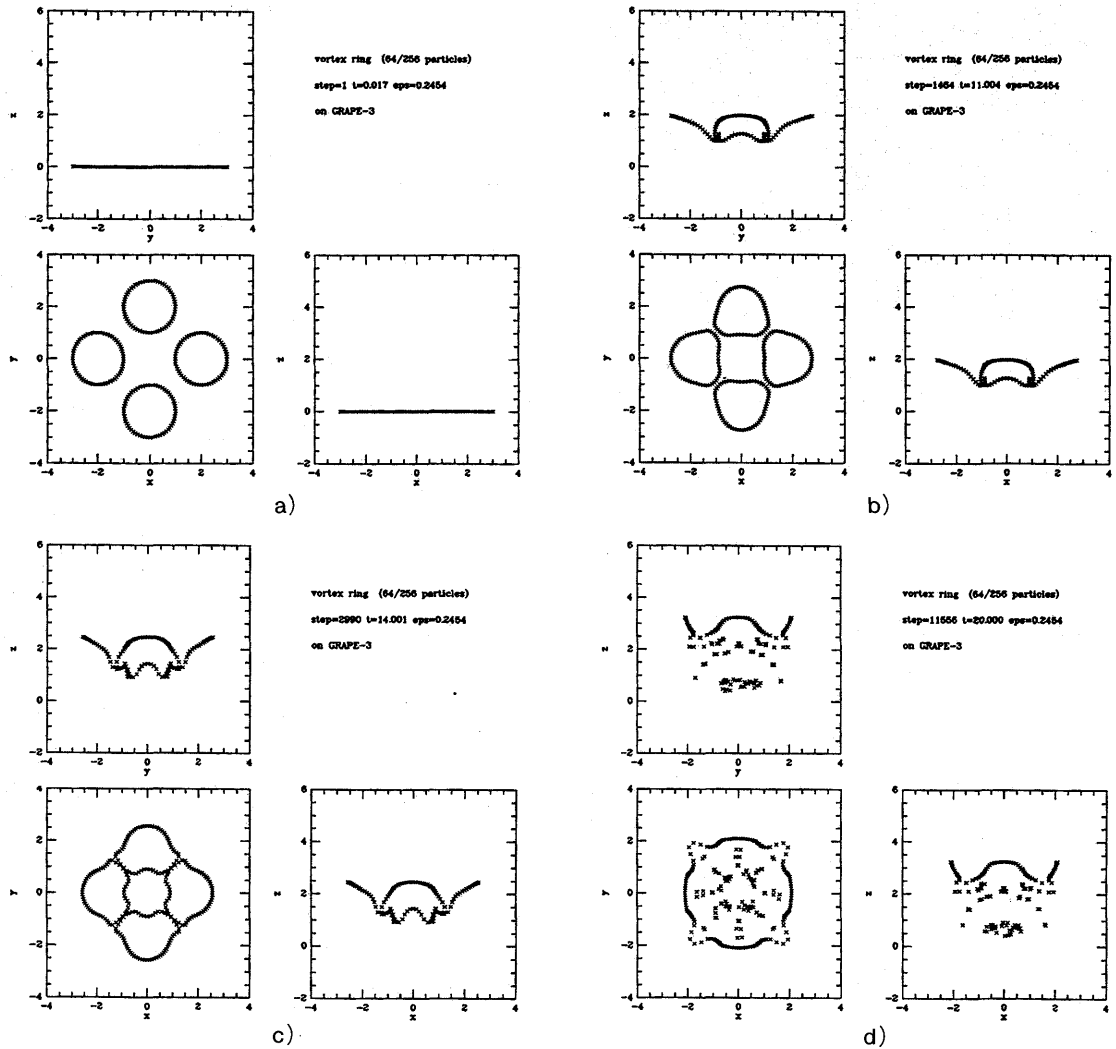


図7 4つの渦輪のリコネクション a) 初期条件 b) 渦輪が接近してくっつこうとしている c) リコネクションが終了した d) 外輪は上に内輪は下に動く内輪では不安定性が成長している

4. GRAPE-2/2A

GRAPE-2とGRAPE-2Aは衝突系のシミュレーションを行うための高精度型GRAPEなのである。精度が必要な位置座標の引き算と力の積算は64ビットの浮動小数点形式(倍精度)で、その他の精度があまり必要ではない部分は32ビット浮動小数点形式(単精度)で計算している。ここではGRAPE-2Aを紹介する。GRAPE-2については文献[3]に詳しい。GRAPE-2Aは36.7cm×

40.0cmのボード上に作られている(図8)。GRAPE-2Aはクロック周波数6MHzで動いている。したがって、最高速度は180Mflopsということになる。

GRAPE-2Aは補間テーブルを使うことによって重力やクーロン力などの逆二乗法則に従う力だけでなく、任意の形の中心力を計算することができる。このため、周期的境界条件付きの粒子シミュレーションで使われるEwald法の実空間部の

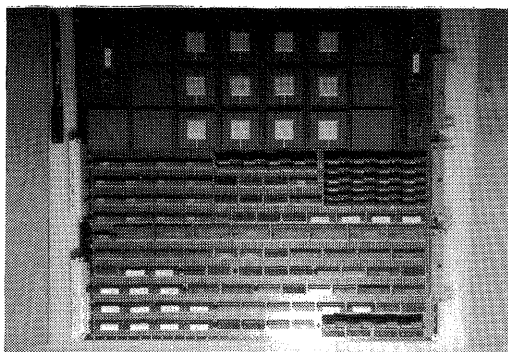


図8 GRAPE-2A

力の積算や結晶やタンパク質の分子動力学シミュレーションに必要なファン・デア・ワールス力の計算もできる。Ewald法については次節で述べる。

GRAPE-2と2Aを使って実行した重力多体シミュレーションの例を示そう。実は典型的な衝突系である球状星団のシミュレーションは行っていない。というのは、GRAPE-2の演算スピードは40Mflops、GRAPE-2Aのそれは180Mflopsのスピードで、専有できるメリットを考慮してもGflopsクラスのスーパーコンピューターで行った計算と大差はないシミュレーションしかできない。したがって、典型的な例でまともにやっても質的に新しい成果が期待できないからである。

それでも、知恵をしばって色々なシミュレーションを行った。ここでは、銀河中心ブラックホールの合体、惑星の形成、3K宇宙背景放射の等方化のシミュレーションを紹介したい。

まず、銀河中心にあるブラックホールがその母銀河が合体したときどうなるか調べた。かなり多くの銀河には太陽の 10^8 倍ぐらいの質量を持つ巨大ブラックホールが存在することが知られている。その母銀河が衝突・合体したときこのブラックホールはまわりの星を重力散乱ではじき飛ばしながら自分はエネルギーと各運動量を失い合体銀河の中心に落下していくはずである。この過程は一種の二体緩和で、力学的摩擦と呼ばれている。巨大な粒子が存在すると、実質的な粒子数が減ることになり、式(3)より速い時間で緩和が起こるのである。

GRAPE-2でこの過程のシミュレーションを行ってみた[7]。2000個の粒子を使って球状の銀河を作った。もちろん、この粒子1個はたくさんの恒星を代表する超粒子である。その中心に周りの粒子より40倍重い粒子を1個置き、ブラックホールとした。シュワルツシルド半径よりも十分遠ければ、相対論的效果は無視できてブラックホールもニュートン力学的な質点と見なせる。この様にして作ったモデル銀河を適当な衝突パラメーターで衝突させてみた。まず、母銀河同士は周りに粒子をはじき飛ばしながら合体する。理論的予測どおりブラックホールは合体銀河の中心に落ち込んで巨大ブラックホールの連星ができる。力学的摩擦は軌道速度が小さい遠心点で最も強く効くので、軌道のエネルギーより軌道角運動量が速く減少する。つまり、ブラックホール連星の軌道の離心率が次第に大きくなる。軌道角運動量がある程度以上小さくなると質量比が40しかないことの結果、他の粒子との衝突によるブラックホールのブラウン運動が目だつようになったのでシミュレーションを打ち切った。現実の銀河では巨大ブラックホールの質量は周りの恒星の 10^8 倍もあるはずで、このブラウン運動は質量比が小さいことによる誤差だからである。シミュレーション終了時に調べてみると、母銀河のコアの大きさは合体前より少し大きくなっていることが分かった。これはブラックホールが周りの粒子を弾き飛ばしたからだと思われる。念のため、ブラックホールを入れずにもう一度同じ条件でシミュレーションを行ってみた。この場合にはコア半径の増加は見られなかった。これ以上大きな質量比を表現するためには、もっとたくさんの粒子を必要とするので、GRAPE-2Aのスピードでも現実的な時間でシミュレーションを終えることができない。

シミュレーションは粒子数の関係でここで打ち切らざるを得なかったが、これから何が起こるかは理論的に推論することができる。ブラックホール連星の軌道離心率は次第に大きくなっていく(図9)。ついには近心点で重力波を強く放射するほど近づく。最後に、強い重力波バーストを放射しながら一気に合体する。これに要する時間を見

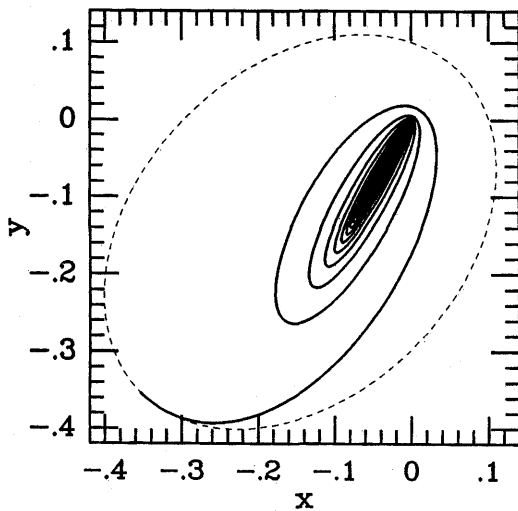


図9 ブラックホール連星の軌道の変化, 軌道離心率が次第に大きくなる波線は力学的摩擦がないときの軌道を表している。

積もってみると 10^9 年程度であることが分かった[9,10]. この過程でブラックホールは銀河の中心にある星でできた構造を皆破壊し, のっぺりとした等温コアが残ると考えられる. 円盤銀河の合体でできたと考えられる楕円銀河の中心には円盤銀河に見られるような鋭い密度のカスポがないのが今まで謎だったが, この様な過程を考えるとうまく説明できる. また, この等温コアの質量は中心にあるブラックホールの質量と同じくらいになる. 巨大な楕円銀河が比較的小さな銀河の合体でできたとすると大きな銀河ほど大きなコアを持つはずである. 実際, 楕円銀河のコアの大きさは銀河全体の半径に比例して大きくなることが知られている[23,24]. また, 銀河の巨大ブラックホール同士の合体による重力波バーストは, 人工惑星のドップラー追跡によって検出できるほど大きく, その頻度も1年に1回ほど期待できることがわかった[5,10].

このようなシナリオがどこまで正しいのか, 質量比をもっと大きくし, もっとたくさんの粒子を入れた大規模シミュレーションを行って, 確かめる必要がある. これは GRAPE-2A の演算スピードではまだ不可能なので, 次の世代の高速高精度 GRAPE が必要である.

次に, 惑星の形成過程のシミュレーションを行った. 星間雲の収縮によって原始太陽とそれを取りまく太陽系星雲が形成される[16]. この太陽系星雲の質量は太陽質量の数%程度である. 太陽系星雲の冷却にともなって, 固体微粒子が円盤の赤道面に沈降し薄い層を作る. この固体微粒子の円盤が十分に薄くなると重力的に不安定になって分裂する. その結果, 質量 $10^{15} \sim 10^{18}$ kg, 半径数キロメートルの微惑星が形成される. この後, 微惑星が太陽の周りを回りながら衝突・合体を繰り返して成長する. 最終的には10個程度の惑星が太陽の周りに作られる. この合体に取り残された微惑星や成長しきれなかった原始惑星がそれぞれ彗星や小惑星であると考えられる. 微惑星の衝突の

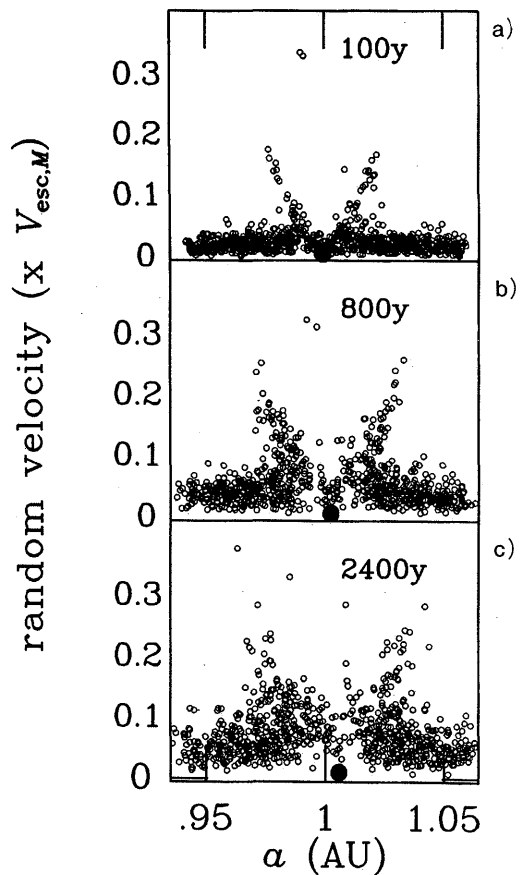


図10 原始惑星(黒丸)による微惑星(白丸)の重力離散 a) 原始惑星が微惑星を散乱する b, c) 散乱された高速微惑星が他の微惑星と衝突して, 微惑星のシステムのランダム速度を上げる.

頻度は微惑星のランダム速度で決められている。さらに、微惑星のランダム速度は微惑星同士の重力散乱によって励起される。これまでの研究で少し重い微惑星が他よりもより頻繁に合体する事が分かっていた。この傾向が長く続けば、1つのものがどんどん成長する暴走的成長をし、原始惑星となる。しかし、原始惑星がある程度成長して、微惑星の散乱に重要な役割を果たすようになる後期に何が起こるのかはまだ全くわかっていない。GRAPE-2A を使い、太陽の周りを回る微惑星がその100倍の質量を持つ成長途上の原始惑星の影響でどの様に散乱されるかを調べてみた(図10) [18]。横軸は軌道長半径、縦軸にランダム速度を取っている。白丸が微惑星、黒丸が原始惑星を表している。原始惑星が微惑星をはねとばし、さらにそれが他の微惑星と重力的に衝突して微惑星の系全体のランダム速度が増加している。原始惑星による重力散乱の結果、原始惑星のまわりの微惑星が減少するので、原始惑星の成長速度が思ったほど速くならない可能性があることがわかった。地球の質量は、 5×10^{24} kg だから、微惑星が 10^6 個から 10^9 個も集まってできたことになる。微惑星と原始惑星の質量比が100よりずっと大きい場合や、いくつかの原始惑星がある場合に何が起こるのか調べていく必要がある。この様な後期のシミュレーションにはまだ粒子数が足りない。本格的なシミュレーションには GRAPE-2A では全く力不足で次世代の高速マシンが必要である。

さらに、GRAPE-2A を使って 3K 宇宙背景放射に対する重力散乱の効果を調べた。宇宙は非常に高温の状態から出発し、その膨張にしたがって温度は下がってきた。宇宙の温度が数万度まで下がると、今まで電離していた陽子と電子が結合し水素原子を作る。それとともにガスと光の相互作用が急に減って、光が物質から解放される(宇宙の晴上り)。われわれから見るとこの水素の再結合のフロントのところまで宇宙は透明で透けて見える。この再結合フロントからの光が宇宙膨張によって大きくドップラー偏移して現在約 3K の温度の黒体放射の宇宙背景放射として観測されている。

現在の宇宙論の最も重要な問題は 3K 宇宙背景放射がどこを見ても全く同じで非常に等方的であることである。その異方性は 10^{-5} 以下である。一方、われわれの近くの銀河は銀河団やもっと大きな超銀河団が存在したりと、極めて非等方的である。この非等方性は宇宙の晴上りの時にあった小さなムラムラの種が成長してできたはずである。しかし、宇宙が数千倍にしか膨張していないのに、このムラムラが 10^5 倍にもなるモデルを作るのはかなり難しい。

しかし、宇宙背景放射は再結合フロントから何の変化も受けずにわれわれのところにやってくるわけではない。再結合フロントとわれわれの間にはたくさんの天体があるからである。アインシュタインの一般相対論によると光も重力によって曲げられる。この重力散乱の効果で本当は大きかった背景放射の非等方性が弱められたのかも知れない。GRAPE-2A を使い、重力によって光がどれくらい曲げられるか計算してみた。一般相対論の光の運動方程式を重力場のポテンシャルが光速に比べて小さいと(ポストニュートニアン近似)すると次のようになる [40]。

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -2 \nabla \phi - 4 \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi) \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{n} は光路に平行な単位ベクトルである。右辺の第一項の $\nabla \phi$ は古典的なニュートンの万有引力に他ならない。非相対論的な粒子の場合と比較すると係数が2倍違うだけである。第二項は光路に平行な成分しか持っていないので光路に対する影響は無視できる。図11は最初は小さかった光の束がランダムに置かれた天体の重力によって広がっていく様子を表している [10]。光の束が十分小さいとき、全ての光が同じ様な重力場を感じてコヒーレントに散乱され、散乱を受けるたび潮汐力によって広がっていく。光束が十分広がると、各部分が別の天体の独立な重力場を感じるのでランダムな方向に散乱される。こうなると、広がるスピードはずっと遅くなってしまふ。現実的な宇宙モデルについて計算してみると、約20億年前(赤方偏移 $z=4$) から散乱天体がある場合、背景放射の異方性を少なくとも30%程度減少さ

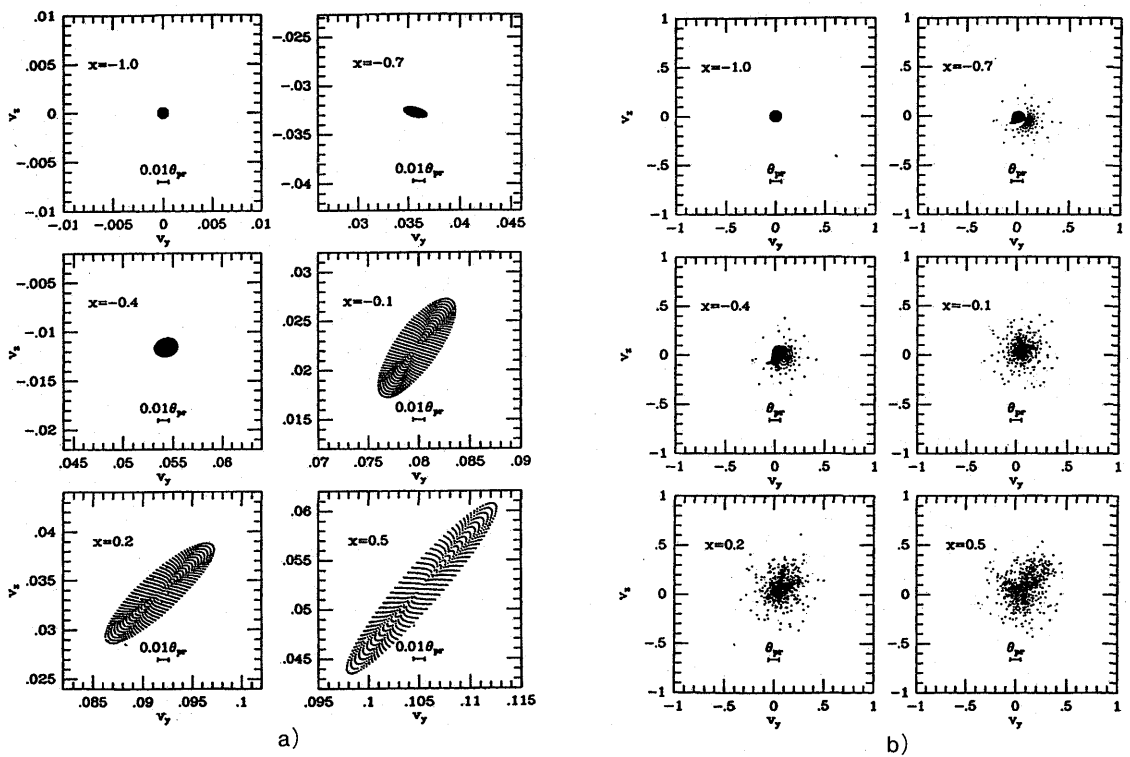


図11 光束の重力散乱の様子は、天球に投影した散乱体の平均粒子間角距離 θ_{pr} に比べて光束が太いかどうかで全然違う。a) 光束が θ_{pr} より細いとき、光束全体がコヒーレントに散乱される。b) 光束が θ_{pr} より太いとき光束の各部分が独立に散乱される。図中の x の値は時間の経過を表す。図中の横棒は θ_{pr} の大きさを表している。

せる効果があることが分かった。重力散乱の効果はモデルに強く依存している。当然ながら、天体が昔から存在していたとすると非常に強い影響がある。宇宙が生まれてから20億年より以前にどのような天体があったのか観測的には良く分かっていない。したがって、もし宇宙の晴上がりの時点でもかなり大きなムラムラがあっても、それが成長してできた天体の重力散乱で異方性が消されて、現在では非常に等方的になっている可能性がある。今までの宇宙論の大前提は宇宙は一様・等方な状態から出発したということである。これは3K宇宙背景放射が等方的であることをもっとも強い根拠にしてきた。しかし、GRAPE-2Aによるシミュレーションはこの大前提を壊す可能性を示した。

では3K宇宙背景放射の等方性は宇宙の晴上がりの時点のムラムラの大きさにどのような制限を与えるだろうか。これに答えるためには、重力多体シミュレーションで物質の重力不安定による密度ムラの成長とそれに散乱される光を同時にシミュレーションする必要がある。これは後に述べるGRAPE-4の大きなターゲットの1つである。

5. WINE

WINE (Wave space INTEGRator for Ewald Method) は周期的境界条件付きの粒子シミュレーションをGRAPE-2Aと共同で加速する専用計算機である。周期的境界条件付きの粒子シミュレーションではEwald法を用いて重力やクーロン力などの遠距離力を計算する。

周期境界条件下である粒子に働く力は、切り出したセル内の他の粒子からの力と無限に続くコピー内の粒子からの力を合わせたものになる。Ewald法[8]はこのような周期的境界条件下での力を、厳密にかつ高速に求めるためのアルゴリズムである。ある粒子*j*に働く力 F_j は、粒子*i*の位置を r_i 、質量(電荷)を M_i とすると、

$$F(r_i) = F_1(r_i) + F_2(r_i) \quad (7)$$

$$F_1(r_i) = -M_i \sum_j \sum_n \left[\frac{2M_j}{\eta\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-r_{ijn}^2/\eta^2)}{r_{ijn}} + \frac{M_j \operatorname{erfc}(r_{ijn}/\eta)}{r_{ijn}^2} \right] \frac{r_{ijn}}{r_{ijn}} \quad (8)$$

$$F_2(r_i) = \frac{2_i M_i}{L^3} \sum_j \sum_k \frac{M_j}{k^2} \exp[-\pi^2 \eta^2 k^2 + 2\pi i k \cdot (r_i - r_j)] \cdot k \quad (9)$$

となる[22]。ここで、 r_{ijn} は粒子*i*と*n*の方向にあるコピーの*j*番目の粒子との距離、 k は波数ベクトル、 L はセルの一辺の長さ、 N はセル内の粒子数をあらわす。 $\operatorname{erfc}()$ は誤差補関数である。この級数は指数関数を含んでいるので比較的速く収束する。 η は計算上のパラメータで F_1 と F_2 の計算時間の和が最小になるように決める。最適

の η は計算するハードウェアによって違う。

WINEは $F_2(r_i)$ を計算するための専用計算機である。 $F_1(r_i)$ は、粒子*i*からの距離によって決まる関数で表される中心力なので、GRAPE-2Aのような任意の中心力を計算できるGRAPEで行う。これらのGRAPEとWINEの2つの専用計算機で、Ewald法の計算を加速することができる。GRAPEとWINEは図12のようにVMEバスを介してホスト計算機と接続する。まずホスト計算機が粒子の位置、質量をGRAPEとWINEに送り、GRAPEとWINEが力 F_1 と F_2 を計算し、その答をホストに送り返す。その後得られた力を使ってホスト計算機が粒子の位置、速度を更新する。

WINEが計算を受け持つ $F_2(r_i)$ は、三角関数を展開すると、

$$F_2(r_i) = -\frac{2M_i}{\Delta} \sum_{n=1}^{n_k} a_n k_n \{ \sin(2\pi k_n \cdot r_i) \times [\sum_j^N M_j \cos(2\pi k_n \cdot r_j)] - \cos(2\pi k_n \cdot r_i) \times [\sum_j^N M_j \sin(2\pi k_n \cdot r_j)] \} \quad (10)$$

のように変形できる。ここで N 、 n_k は、それぞれ粒子数、和をとる波数ベクトルの数である。 a_n は、

$$a_n = \frac{\exp(-\pi^2 \eta^2 k_n^2)}{k_n^2} \quad (11)$$

によって与えられる。

幸いなことに、式(10)は波数ベクトルと粒子の座標の内積をとり、三角関数を計算し、質量またはフーリエ係数を乗じて積算する、というほとんど同じ演算手続きの繰り返しになっている。われわれは、この演算の手続きのための専用パイプラインを開発することにした。これがWINEである。

WINE-1はWINEの試作1号機である[12]。図13はWINE-1ハードウェアのブロック図である。WINE-1は1秒間に約 4.8×10^8 演算をすることができる。WINEパイプラインが1クロックサイクルに約40演算行い、クロックサイクルが

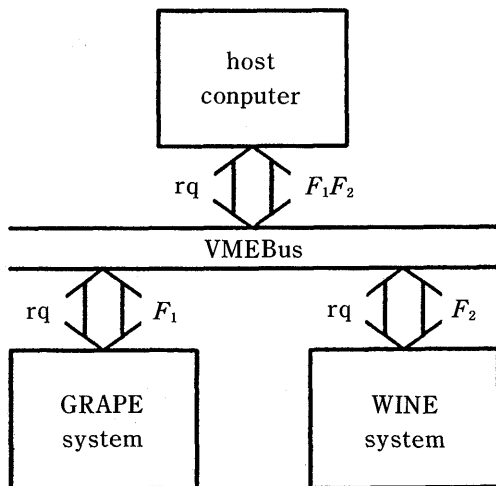


図12 GRAPE/WINEシステム。

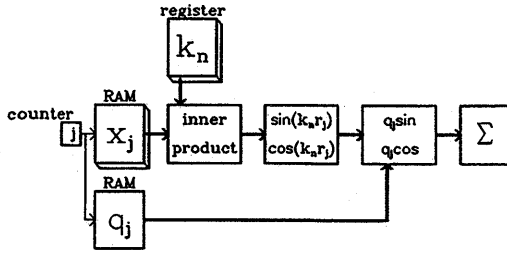


図13 WINE-1の構造

12MHzだからである。

6. GRAPE-4

4節で繰り返し述べたように、衝突系の本格的な研究には GRAPE-2A では全く計算パワーが不足している。この問題を一気に解決するため、1992年度から文部省科学研究費補助金特別推進研究を受けて GRAPE-4 計画がスタートした。1994年までにその実効性能がテラフロップスを超える GRAPE-4 を完成させる予定である。たぶん実効性能がテラフロップスをこえる世界最初の計算機になるであろう。GRAPE-4 を使い、球状星団の進化や惑星の集積過程、銀河中心巨大ブラックホールの進化、宇宙背景放射の重力散乱による等方化などを本格的に研究する予定である。

時間積分には可変時間ステップ予測子・修正子法 [28,29] を採用した。予測子と修正子は Hermite 補間多項式に基づいて次のように構成する。まず、予測子 x_p と v_p は

$$r_p = r_0 + v_0 \Delta t + \frac{a_0}{2} \Delta t^2 + \frac{\dot{a}_0}{6} \Delta t^3 \quad (12)$$

$$v_p = v_0 + a_0 \Delta t + \frac{\dot{a}_0}{2} \Delta t^2 \quad (13)$$

となる。ここで、 r_0 , v_0 , a_0 , \dot{a}_0 はそれぞれ、時刻 t における粒子の位置、速度、加速度、加速度の時間微分で、 Δt は時間ステップである。 a_0 と \dot{a}_0 は相対位置 $r_{ij} = r_i - r_j$ と相対速度 $v_{ij} = v_i - v_j$ を使って

$$a_0 = \sum_{j=1}^N Gm_j \left[\frac{r_{ij}}{|r_{ij}|^{2/3}} \right] \quad (14)$$

$$\dot{a}_j = \sum_{i=1}^N Gm_i \left[\frac{v_{ij}}{|r_{ij}|^{3/2}} - 3 \frac{(v_{ij} \cdot r_{ij}) r_{ij}}{|r_{ij}|^{5/2}} \right] \quad (15)$$

で求めることができる。一方、修正子 x_c と v_c は

$$r_c = r_p + \frac{a^{(2)}}{24} \Delta t^4 + \frac{a^{(3)}}{120} \Delta t^5 \quad (16)$$

$$v_c = v_p + \frac{a^{(2)}}{6} \Delta t^4 + \frac{a^{(3)}}{24} \Delta t^4 \quad (17)$$

ここで、 $a^{(2)}$ と $a^{(3)}$ は a の 2 次と 3 次の導関数で

$$a^{(2)} = \frac{-6(a_0 - a_1) - \Delta t(4\dot{a}_0 + 2\dot{a}_1)}{\Delta t^2} \quad (18)$$

$$a^{(3)} = \frac{12(a_0 - a_1) + 6\Delta t(\dot{a}_0 + \dot{a}_1)}{\Delta t^2} \quad (19)$$

a_1 と \dot{a}_1 は時刻 $t + \Delta t$ における加速度とその時間微分である。

また、GRAPE-4 は Individual 時間ステップ法を採用した [1]。衝突系では近接散乱中の粒子や近接連星系を作っている粒子は非常に短い時間ステップで積分する必要がある。近接連星の周期は数日である。これに対し球状星団の進化する時間尺度は 10 ~ 100 億年である。両者の間に 12 桁のギャップがあるので、全部の粒子を同じ時間ステップで計算することはできない。しかし、幸いなことに短い時間ステップを要求する粒子は非常に少ないので Individual 時間ステップ法を用いて系のシミュレーションを効率よく行うことができる。Individual 時間ステップ法では粒子はそれぞれ固有の時間 t_j と時間ステップ Δt_j を持っている。もちろん、短い時間ステップを要求する粒子には、短い Δt_j を与える。 $t_j + \Delta t_j$ が小さい粒子から順に速度と位置を更新して行けば、短い時間ステップを必要とする粒子は頻繁に、そうでない粒子はときどき時間積分を進めることができる。

この時間積分アルゴリズムを高速に実行するため、GRAPE-4 は a_0 と \dot{a}_0 を相対位置 r_{ij} と相対速度 v_{ij} から計算する HARP (Hermite Accelerator Pipe) チップ [37] と、(12), (13) 式を使って粒子の位置を予測する予測子チップ [26] を開発中である。

HARP チップを 64 個と予測子チップを 1 個乗せたボードを 25 枚並列にホスト計算機につなぐ。全部で HARP チップは $25 \times 64 = 1600$ 個並列に動作する。クロックを 33MHz とするとそのスピードは約 1 Tflops となる。図 14 は HARP チップ

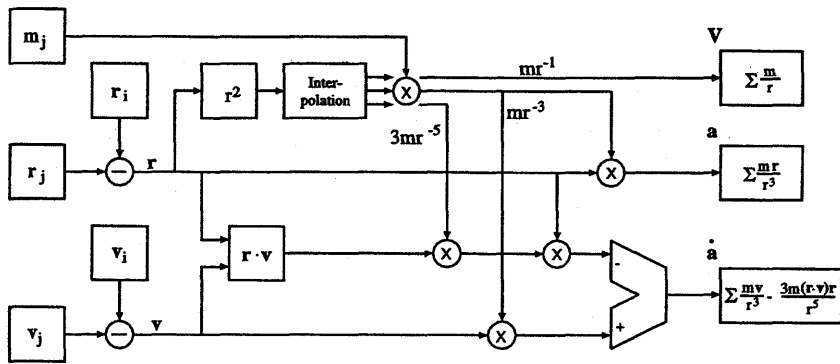


図14 HARPチップの構造

の構造を表している。シミュレーションは次のように進められる。まず、ホスト計算機が最小の $t_j + \Delta t_j$ を持つ粒子を選び出し、予測子 (12, 13 式) を使って r_j と v_j を予測する。その結果を HARP チップに送る。次に、HARP チップは a_0 と \dot{a}_0 を式 (14) と (15) を使って計算する。この時予測子チップがボード上に格納されている値を使って i 粒子の位置と速度を予測し、HARP チップにクロック毎に供給する。求めた a_0 と \dot{a}_0 はホスト計算機に送り返される。最後にホスト計算機が求めた値を使って位置と速度を修正し、 $t_j + \Delta t_j$ における値とする。結果はボード上のメモリーに書き込む。

Δt をある数の 2 の整数乗分の 1 にとっておけば、たくさんの粒子が同じ時刻で更新できることになる。これらの粒子については、同じ予測値を使うことができるので予測子チップの数は HARP チップの数の十分の一でよい [26]。

7. 専用計算機の将来

GRAPE のような専用計算機は、並列性を利用し、シリコン素子の高集積化のメリットを最大限に享受できる。ざっと見積もってみると、西暦 2000 年までに Peta flops (1 秒間に 10^{15} 回の浮動小数点演算) の GRAPE システムを作ることが可能である。西暦 2000 年には設計ルールは現在の 3 分の 1 の 0.2 ミクロンまで小さくなるだろう

(HARP チップの設計ルールは 1 ミクロン)。そうするとたとえば GRAPE パイプラインが 1 チップに 20 本入ることになる。当然クロックスピードは 100 ~ 300 MHz になるだろう。このようなスーパー GRAPE チップの演算スピードは 1 個あたり 100 Gflops 程度となる。これを 10000 個並列接続すれば Peta flops のシステムができることになる。この程度のチップを並列接続することはマルチチップモジュールなどの実装技術を使えば難しくはない。ホスト計算機には数十 Gflops 程度の超並列計算機か、ジョセフソン接合素子を使った超高速スカラー計算機を使えば良い。この程度のことには現在の技術の延長で十分可能である。

では、専用計算機は本当に役に立つのだろうか。もちろん、役に立つ。専用計算機は現在のスーパーコンピュータの性能をはるかに上回るものでさえ数億円で作ることができる。これは素粒子実験の加速器や天文観測用の望遠鏡や人工衛星に比べてかなり少ない金額である。これらは、望遠鏡は天文観測にしか使えないし、加速器は素粒子実験にしか使えない専用装置である。1 つの目的のためだけに数億円の予算で専用計算機を作るのは十分に成り立つ話である。

また、現在大規模な計算を必要としている問題は数としてはさほど多くない。まあ、ざっと 10 個ぐらいである。シリコンの高集積化技術のメリットをフルに使うことができる専用計算機の演算

速度あたりのコストは約1000倍汎用計算機より高い。これがフルタイムで1つの問題に使えることを考慮すると、1つの問題に対してさらにその10倍の10000倍コストパフォーマンスが良いことになる。したがって、それぞれの問題に特化した専用計算機を10個ぐらい作る方が、10個の問題に対応できる一つの計算機を作ったよりまだ1000倍も得である。また、スーパーコンピュータ購入と違い某国の横槍に悩まされることもない。国際政治より電子回路の方がよほどたちが良い。

さらに、かなり多くの問題について高性能の専用計算機を作ることができる。自然を記述するには大ざっぱに言って粒子法と格子法の2種類の方法がある。粒子法では系をたくさんの粒子に分割し、粒子間に働く力を求め、粒子の運動を追いかける形で系の発展を記述する。重力多体シミュレーションや分子動力学シミュレーションがこれに当たる。一方、格子法では空間に固定された格子で系を分割する。各々の格子に対する物理量の流入出を計算して格子点上の物理量の変化で系を記述する。イジングモデルやメッシュ法による流体力学シミュレーションなどがこれに当たる。両者は流体力学でいうラグランジュ法とオイラー法に対応している。

粒子法のシミュレーションでは多くの場合、粒子間の力を計算するのに計算時間の大部分が使われる。粒子間に働く力が近距離力の場合でも、粒子の運動にしたがって、近接粒子がどんどん変化する。今どの粒子が近接しているかを判定するだけでかなりの計算時間を必要とする。そこでGRAPEの様に粒子間の力を計算する高速専用ハードウェアを作って加速すればよい。粒子間の力の計算のほとんどは並列計算可能である。GRAPEが重力多体系だけでなく、結晶やタンパク質の分子動力学シミュレーションや渦糸法による流体力学シミュレーションに応用できたのは偶然ではない。粒子法ならGRAPEまたはその変種(例えば、近接相互作用の計算のために近接粒子のリストを作る専用ハードウェアなど)の専用計算機で幾らでも計算速度が稼げる。今までは粒子法で計算しなかったものまでむりやり粒子法に書

き直しGRAPEを使うことでシミュレーションを大幅に加速する事ができるかも知れない。

格子法のシミュレーションでは隣接する格子との相互作用でその格子点の物理量に変化する。もちろん遠距離相互作用する場合もあるがそれはGRAPEの様な専用計算機に任せる。粒子法と違うのは格子が空間に固定されているので、ある格子に隣接して相互作用する格子があらかじめ分かっていることである。空間をたくさんのセルに分割し、それをたくさんのユニットに割り当てて並列計算する。ユニットは二次元または三次元上に配列し、近接ユニットだけを直接つなぐ。しかし、1つ1つのユニットには超並列計算機のように汎用のスカラー計算機は使わず、その問題に特化した専用ハードウェアにする。例えば、メッシュ法の流体力学シミュレーションなら適当な流体計算スキームの計算を行う専用パイプラインとすればよい。

専用LSIを使って高付加価値・低コストの製品を作るのは産業界のいわば常識である。この手を使って、ファミコンやハンディービデオカメラなどのヒット商品が作られた。専用LSIを使った専用計算機を作って大規模シミュレーションを行うやり方はシミュレーション物理学の大きな潮流になると考えられる。プラズマ・核融合の分野でもこの方向の検討を始めたらどうだろう。

8. Acknowledgement

この稿で紹介したGRAPEを使った研究は、もちろん私だけの仕事ではない。図などを提供してくれたP. Frischさん、船渡陽子さん、井田茂さん、福重俊幸さん、小久保英一郎さん、牧野淳一郎さん、泰地真弘人さんなどGRAPEチームのメンバーに感謝したい。牧野さんには原稿を読んで批評していただいた。

参考文献

- [1] Aarseth, S. J., 1985 in *Multiple Time Scales* ed. J. U. Brackhill and B. I. Cohen (Academic Press).
- [2] 戎崎俊一, 日本物理学会誌, **42**, 812 (1990).
- [3] 戎崎俊一, 生物物理, **31**, 42 (1991).

- [4] 戎崎俊一, 天文月報, **85**, 502 (1992).
- [5] 戎崎俊一, 遊星人, **1**, 50 (1992).
- [6] T. Ebisuzaki, *et al.*, *Publs Astron. Soc. Japan*, **45**, 269 (1993).
- [7] T. Ebisuzaki, J. Makino and S. K. Okumura, *Nature*, **354**, 212 (1991).
- [8] P. P. Ewald, *Ann. Phys.*, **64**, 253 (1921).
- [9] T. Fukushige, T. Ebisuzaki and J. Makino, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **44**, 281 (1992).
- [10] T. Fukushige, T. Ebisuzaki and J. Makino, *Astrophys. J. (Letters)*, **396**, L62 (1992).
- [11] T. Fukushige, J. Makino, T. Ebisuzaki, submitted to *Nature* (1993).
- [12] T. Fukushige, J. Makino, T. Ito, S.K. Okumura, T. Ebisuzaki and D. Sugimoto, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **45**, 361 (1993).
- [13] T. Fukushige, J. Makino, O. Nishimura and T. Ebisuzaki, *Publ. Astron. Soc. Japan*, submitted to PASJ (1993).
- [14] Y. Funato, J. Makino and T. Ebisuzaki, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **45**, 289 (1993).
- [15] P. Frisch, to be presented in Conference: *Panchromatic View of Galaxies*, Kiel March 8-12, 1993 (1993).
- [16] C. Hayashi, *et al.*, in *Protostars and Planets*, P. C. Black and M.S. Mathews, Arizona Press (1985).
- [17] I. Hachisu, *et al.*, in preparation (1993).
- [18] S. Ida and J. Makino, *Icarus*, in press (1993).
- [19] T. Ito, J. Makino, T. Ebisuzaki and D. Sugimoto, *Computer Physics Communications*, **187**, 60 (1990).
- [20] T. Ito, T. Ebisuzaki, J. Makino and D. Sugimoto, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **43**, 427 (1991).
- [21] T. Ito, T. Fukushige, J. Makino, T. Ebisuzaki, D. Sugimoto, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **45**, 339 (1993).
- [22] Kittel, *固体物理学入門第六版* (1953).
- [23] J. Kormendy, *Astrophys. J.*, **295**, 73 (1985).
- [24] T. R. Lauer, *Astrophys. J.*, **292**, 104 (1985).
- [25] J. Makino, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **43**, 859 (1991).
- [26] J. Makino, T. Fukushige, S.K. Okumura and T. Ebisuzaki, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **45**, 303 (1993).
- [27] J. Makino, T. Ebisuzaki and S.K. Okumura, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **43**, 639 (1991).
- [28] J. Makino and S. Aarseth, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **44**, 141 (1992).
- [29] J. Makino, E. Kokubo and M. Taiji, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **45**, 349 (1993).
- [30] J. Makino, T. Ito and T. Ebisuzaki, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **42**, 717 (1990).
- [31] S.K. Okumura, J. Makino, T. Ebisuzaki, T. Fukushige, T. Ito, D. Sugimoto, E. Hashimoto and K. Tomida, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **45**, 329 (1993).
- [32] Y. Ohno, I. Hachisu, J. Makino, T. Ebisuzaki, D. Sugimoto and Y. Chikada, *Publ. Astron. Soc. Japan*, in press (1993).
- [33] Y. Oshima and S. Asaka, *JSPS*, **42**, 708 (1977).
- [34] L. Spitzer, Jr., *Dynamics Evolution of Globular Clusters*, Princeton Univ. Press (1987).
- [35] D. Sugimoto, Y. Chikada, J. Makino, T. Ito, T. Ebisuzaki and M. Umemura, *Nature*, **345**, 33 (1990).
- [36] 杉本大一郎: 手作りコンピュータへの挑戦, 講談社ブルーバックス B956 (1993).
- [37] M. Taiji *et al.*, in preparation (1993).
- [38] K. Tomita and K. Watanabe, *Prog. Theor. Phys.*, **82**, 56 (1989).
- [39] A. Toomre, *Astrophys. J.*, **178**, 623 (1972).
- [40] C. M. Will, in *Theory and experiment in gravitational physics*, (Cambridge Univ. Press, London 1981).