



MHD 緩和現象に伴うイオン異常加熱について

吉田 善章

(東京大学工学部)

(1990年4月18日受理/1990年6月8日改訂原稿受理)

Anomalous Ion Heating Correlated with MHD Relaxation

Zensho Yoshida

(Received April 18, 1990/Revised Manuscript Received June 8, 1990)

Abstract

An excess of magnetic energy is spontaneously released through MHD relaxation process. The released energy is dissipated by the ions and electrons. Using the classical resistivity and viscosity coefficients, the partition relation of the dissipated power into the electrons and ions has been estimated. In a driven reconnection, where the growth rate of the instability is quite large, a slight compressibility of the velocity field results in strong viscous heating of the ions. Concerning the total energy balance, there exists an anomalous resistive dissipation through mean-field current, when the resistivity distribution is not uniform. This is a counter process to the direct heating of the ions, which implies a direct loss channel for the applied energy through the electrons.

Keywords : anomalous ion heating, viscosity, MHD relaxation, helicity,

1. はじめに

MHD 緩和現象は、プラズマに与えられた余剰の磁気エネルギー（主としてトロイダル電流に起因する電磁応力による）の自発的な開放過程である¹⁾。誘導電場等によって駆動された系においては、平均平衡配位（mean field）の周りに揺動（fluctuation）が存在して、駆動電場と揺動電場との競合によって構造が保持されると考えられる。揺動が、大きな振幅を持つコヒーレントなモードへと発達する場合、この緩和過程は間欠的現象の印象を与えるが、多数モードの非線型結合によってランダムな位相の揺動が形成される場合は、連続的な緩和が起こると言ってもよい。sawtooth 振動に伴う電流分布の再編成は前者の代表的な実例である。又、RFP で観られる乱流的なダイナモ効果による逆磁場の保持は後者の好例と言えよう。

さて、この様な MHD 緩和過程において、開放された磁気エネルギーはいったいどうなるのであろうか？

Department of Nuclear Engineering, The University of Tokyo, Hongo, Tokyo 113.

熱力学的に考えると、構造の保持は一定の揺らぎに伴うエントロピーの生産と表裏を共にしている筈である。駆動電場によって、先ず磁気エネルギーとしてプラズマに与えられたエネルギーの「余剰分」は、緩和過程を通じて熱化しつつ、mean field の構造を保持するのである。エネルギーの流れは、入力エネルギーとバランスするだけのエネルギーが、最終的には系外へ熱として放出されるというパスを成すわけであるが、その過程において、電子のチャンネルとイオンのチャンネルとがどの様に使い分けられながら緩和が進行するのが、プラズマ物理としては興味深い問題となる。所謂「異常加熱」は、緩和によって開放された磁気エネルギーが、プラズマ中のイオンや電子の熱エネルギーへ、一旦有意なレベルだけ投入されることを言う。

勿論、緩和過程に伴う揺動によって、プラズマ中の輸送現象も大きく変化する。緩和による異常加熱を定量的に把握できるのは、磁氣的な自由エネルギーが大きな系に限られるであろう。即ち、緩和過程によって熱化されるパワーが、通常の加熱（オーミック加熱や追加熱）によるパワーと比べて同程度以上の場合に、この問題が重要になるのであって、逆にそれが小さい場合は、所謂「異常輸送」（通常加熱エネルギーに対する）のみが支配的な現象になるであろう。具体的には、前者のカテゴリーに入るものとして RFP、ULQ やスフェロマック等のピンチプラズマ系や、太陽フレアなどの宇宙プラズマ系が考えられる。

MHD 緩和に伴う異常加熱の問題が近年クローズアップされている背景には、RFP や ULQ の実験で、イオン温度の異常を示すデータが得られ始めていることがある（第2節参照）²⁻⁶。勿論、核融合研究の立場からは、イオンが異常に加熱されるということとは甚だ都合な話だと言う趣旨もある訳であるが、物理学的にも、プラズマの挙動の基礎を理解する上で興味深いデータと言えよう。即ち、MHD 緩和で開放された磁気エネルギーは、イオンの直接加熱に寄与するであろうという予測が立ち得るのである。既にいくつかの理論モデルも登場している^{7,8}。本論文では、MHD 緩和現象について今日まで得られてきた成果を注意深く再検討しつつ、緩和と異常加熱との関係について基礎的な概念を整理したい。

2. 背景と予備的な考察

2-1 MHD 緩和とイオンの直接加熱

RFP の実験では、各装置に於て1985年頃からイオン温度の測定が精力的に行われ、イオンの異常加熱機構の存在を示唆するデータが出始めた²⁻⁵。RFP プラズマは純粹に誘導電場のみによって加熱されているが、イオン温度は電子温度を上回るレベルに達し、又イオンの加熱率も電子-イオンのエネルギー緩和率を上回る事が示された。従って、イオンを直接加熱する機構が存在すると考えられる。

このようなイオンの直接加熱には MHD 緩和現象に伴う異常加熱が関与していると考えられている。MHD 緩和においては、不安定性（主として電流駆動モード）によって励起されたプラズマの運動が作る揺動電場 ($\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) が本質的な役割を果たす。プラズマの流体的な運動量は主としてイオンの集团的運動が担っているが、これはイオンの粘性によって熱化され得る。即ち、プラズマの余剰磁気エネルギーは電流駆動モードによって一旦流体的運動エネルギー（イオンの集团的運動エネルギー）に変換され、更に粘性によってイオンの熱エネル

ギーへと変換されて行く、と言うシナリオが考えられる⁷⁾。この考え方には大筋において首肯させられるのであるが、定量的な検討を行うに際して幾つかの問題が出て来る。以下、それらを整理しよう。

2-2 揺動の粘性散逸と抵抗散逸

まず、揺動電流を介しての電気抵抗散逸が、揺動の全散逸の中でどれだけの寄与を持つのかと言う問題を考える必要がある。即ち、不安定性が作る揺動電場によって、一旦電流のエネルギー（揺動場の磁気エネルギー）に変換され、更に抵抗によって電子の熱エネルギーへと変換されて行くと言うチャンネルが存在する訳で、この電子のチャンネルと、先に述べたイオンのチャンネルとの間で散逸エネルギーの分配はどの様になるのかと言う問題を考えねばならない。

ところが、これまでのMHD緩和モデルではイオンのチャンネルは殆ど考慮されておらず、その意味で通常の緩和モデルでは電子のチャンネルだけでエネルギー散逸を説明してきた事になる。例えば、乱流ダイナモモデルでは不安定性の非線型発展が波数空間でモードのカスケードを生じ、抵抗散逸 ($\sim \eta k^2$, k :波数) が促進される効果を重視する^{9,10)}。J.B. Taylorの緩和モデルでは、こうしたエネルギー散逸がヘリシティの散逸よりも急速に起こることによってRFPの形成を説明している¹¹⁾。又、種々のMHDシミュレーションでは、粘性項を無視した(数値安定化の為の人為項のみ)方程式系が用いられてきた。磁気再結合が起こる近傍に集中した揺動電流がシミュレートされており、その抵抗散逸が前述のカスケードに対応すると解釈されている¹²⁻¹⁴⁾。

勿論、これらのMHD緩和の研究では、形成される構造の方が主題であって、たとえ散逸されるエネルギーの方に十分な注意が払われてなくとも、その結論の大筋には影響がないのかも知れない。しかし、MHD緩和とイオン異常加熱とを統一的に理解するためには、この問題を調べなくてはならない。第3節では散逸エネルギーのイオン及び電子への分配率を計算し、実はイオンチャンネルの散逸が支配的であることを示そう。

2-3 平均場による異常散逸

次の問題は平均場 (mean field) による抵抗散逸の評価である。誘導によって系に入力される全エネルギーの散逸は、平均場の電流による抵抗散逸と、揺動による散逸(イオンの粘性散逸と電子の抵抗散逸)に分配される(図1参照)。ここで、平均場による異常散逸 (anomalous dissipation) が存在し得ることに注意したい¹⁵⁾。この

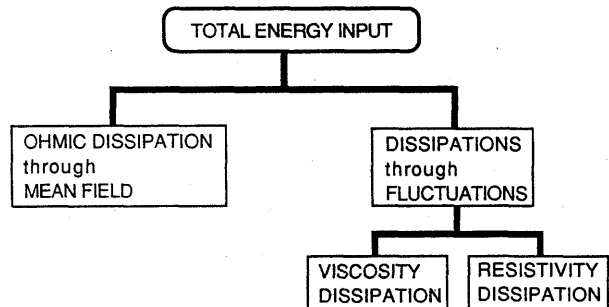


図1. オーミックドライブされたプラズマに於けるエネルギー散逸チャンネル。

異常散逸は、局所的な電子チャンネルの強いエネルギー損失と、電流密度分布の形成機構の“異常”とによって引き起こされる。“正常”な場合には、電気抵抗が大きな低温のプラズマ領域には少ない電流しか流れず、ジュール散逸は小さくなる。従って、オーミック入力は、閉じ込めが良好な高温・低抵抗の領域に集中し、総体として良好な閉じ込め特性を得ることができる。しかし、仮に強いエネルギー損失を持ち高温になり得ない領域（例えば磁気面が乱れたエッジ近傍）に高い電流密度が与えられると、ジュールエネルギー散逸はこの低温領域に集中し、結果エネルギーはこの電子チャンネルを通じて激しく失われることになる。

この様な状況はプラズマ中の電場が著しく不均一な場合でないとは生じないが、MHD 緩和現象の下ではこうした状況が起り得る。緩和過程によって自己発生する電場（所謂ダイナモ電場）によって、プラズマ中の電流分布が自己調整されるからである。放電プラズマではしばしば磁気エネルギーがプラズマの運動を支配するだけの大きな自由エネルギーを持ち、従って磁場配位（従って電流密度分布）は、プラズマが安定化する構造へと自己形成を起す傾向を持つ。この場合、電流密度分布と抵抗率分布との相関は小さくなり、高抵抗領域に電流を流すのに必要な電場はプラズマの自己場によって与えられると考えられる。第4節で示すように、プラズマが自己形成する配位におけるジュール散逸は、古典的に電流が拡散した系（正常な電流分布の系）でのジュール散逸よりも常に大きい。

実験的に揺動成分の散逸パワーを算出する際は、全入力から平均場による散逸分を差し引くことになるが、平均場成分の評価には注意を要するのである。平均場による異常散逸分は、電子チャンネルによるエネルギー損失を反映したものであるから、揺動成分がイオン加熱に寄与することと比べると全く対照的である。

3. 粘性によるイオン異常加熱

3-1 粘性散逸と抵抗散逸

MHD 揺動を介して散逸されるエネルギーが、イオンと電子とにどの様に分配されるかを計算しよう。イオンの熱エネルギーへの変換は、プラズマの流速の揺動 v_1 がイオンの粘性によって散逸されることで起り、一方電子の熱エネルギーへの変換は揺動電流 j_1 が抵抗によって散逸されることで起る。即ち、イオン及び電子に入る加熱パワー P^i と P^e は各々

$$P^i = \int v_1 \cdot \text{div } \Pi \, dv,$$

$$P^e = \int B_1 \cdot \text{rot } (\eta j_1) \, dv / \mu_0$$

で与えられる。但し、 Π は応力テンソル、 $\text{rot } B_1 = \mu_0 j_1$ 、 η は抵抗率を表す。部分積分を行い、表面項を無視する（積分を揺動全体に互ってとる）と、

$$P^i = \int [\nu_d \Omega_d^2 + \nu_r \Omega_r^2] \, dv, \quad (1)$$

$$P^e = \int \eta j_1^2 \, dv \quad (2)$$

と書くことができる。但し、 $\Omega_d^2 = (\text{div } \mathbf{v}_1)^2$, $\Omega_r^2 = (\text{rot } \mathbf{v}_1)^2$ である。

P^i の第1項及び第2項を各々 P_d^i , P_r^i と書くことにする。

古典的な粘性係数, 抵抗率は

$$\begin{aligned} \nu_r &= 0.3 n_i T_i / (\omega_i^2 \tau_i), \\ \nu_d &= [1 + (\omega_i \tau_i)^2] \nu_r, \\ \eta &= m_e / (2n_e e^2 \tau_e) \end{aligned}$$

と与えられる¹⁶⁾。但し、 n_i はイオン密度、 T_i はイオン温度、 τ_i , τ_e は各々イオン-イオン、電子-イオンの衝突時間、 m_e は電子の質量、 e は素電荷、 ω_i はイオンのジャイロ周波数を表す。この表式では、高温或は低密度の極限で ν_d が無限に大きくなる傾向を示すが、実際はイオンの平均自由行程 λ_m が系の結合長 L より長くなると、Knudsen数 ($Kn = \lambda_m / L$)の2乗程度の補正を施す必要がある(後述)。

3-2 MHD 揺動に伴う渦と電流の評価

さて、 P^i と P^e は各々揺動 $\mathbf{v}_1, \mathbf{j}_1$ に関係した量であるから、両者を比べるためには \mathbf{v}_1 と \mathbf{j}_1 のself-consistentな関係を得る必要がある。ここではスラブプラズマに於ける電流駆動不安定性についての計算からオーダー評価を導こう。

MHD緩和現象は主として電流駆動の不安定性によって引き起こされる磁気再結合がその主要な基礎過程となる。揺動に伴う散逸は、この磁気再結合点近傍に局在する。図2は電流駆動モードによる磁気再結合の様子を示す。再結合が起こる共鳴磁場を \mathbf{B}_0 と書き、 \mathbf{B}_0 の方向に z 軸を取る。磁場 \mathbf{B} のシヤ-成分を B^* とし、

$$\mathbf{B} = B_0 \text{grad } z + B^* \text{grad } y$$

となる局所座標を取る。 $x=0$ で $B^*=0$ 、 x 軸方向に磁気再結合の駆動流が流れ込んでくる。以下の基礎方程式を用いる。運動方程式は

$$\rho \gamma \mathbf{v}_1 = -j_{1,z} B^* \text{grad } x - \text{grad } P, \tag{3}$$

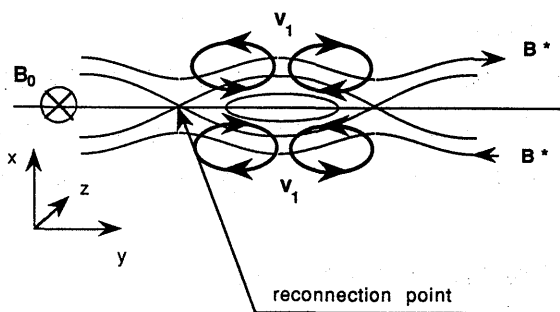


図2. 磁気再結合過程のスラブモデル。

但し, ρ はプラズマの質量密度, γ は不安定性の成長率, $j_{1,z}$ は揺動電流の z 成分, $P = p + B_{1,z}B_0/\mu_0$, p は圧力を表す. 誘導法則 (Faraday) の z 成分を使う;

$$\gamma B_{1,z} = \text{rot}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \cdot \text{grad } z \quad (4)$$

但し, $B_{1,z}$ は揺動磁場の z 成分である. ここで, z 成分については電気抵抗が無視できる. (4) を書き直すと,

$$\gamma p_1^m = -p_0^m \text{div } \mathbf{v}_1 \quad (4')$$

但し, $p_1^m = B_{1,z}B_0/\mu_0$, $p_0^m = B_0^2/\mu_0$ である.

運動方程式 (3) の両辺の rot を取ると

$$\Omega_r = |\text{rot } \mathbf{v}_1| = (\rho \gamma)^{-1} k_y j_{1,z} B^*,$$

但し, k_y は y 方向の波数である. 又, (3) の y 成分は

$$\rho \gamma v_{1,y} = i k_y (p_1 + p_1^m)$$

但し, p_1 は圧力の揺動分である. 低 β の場合, p_1 は p_1^m に対して無視できる. (4') を用いると,

$$\begin{aligned} \Omega_d &= |\text{div } \mathbf{v}_1| = (\gamma/\omega_A)^2 k_y v_{1,y} \\ &= (\gamma/\omega_A)^2 (\varepsilon k_y)^{-1} \Omega_r \end{aligned}$$

を得る. 但し, $\omega_A = (p_0^m/\rho)^{1/2} k_y$ は Alfvén 周波数, ε は渦の x 方向の厚みを表す.

以上の Ω_r , Ω_d の表式を式 (1) に用い, 式 (2) を使うと,

$$P_r^i/P^e = 0.3 (m_i/m_e)^{1/2} \beta_i (\omega_A/\gamma)^2 (\lambda \varepsilon)^2,$$

$$P_d^i/P^e = 0.3 [1 + (\omega_i \tau_i)^2] (m_i/m_e)^{1/2} \beta_i (\gamma/\omega_A)^2 (\lambda/k_y)^2,$$

を得る。但し、 $\beta_i = 2 n_i T_i \mu_0 / B_0^2$ はイオンのベータであり、以下の関係を用いた

$$B^* \sim \epsilon d B^* / dx \sim \epsilon \lambda B_0$$

但し、 $\lambda = \mu_0 j_{\parallel} / B_0$ 、 j_{\parallel} は磁場に平行な平均場の電流密度である。RFP では $\lambda \sim 2 \theta / a$ 、 θ はピンチ比、 a は小半径である。

代表的な数値をあたってみよう。RFP 等の典型的な値、 $T_i = T_e = 100$ eV、 $n_e = n_i = 10^{20}$ m⁻³、 $B_0 = 0.3$ T の場合を考える。駆動型の磁気再結合では、 (ω_A / γ) は10程度である。これらの数値を用いると、

$$P_r^i / P^e \sim 10^{-2}$$

$$P_d^i / P^e \sim 10^2$$

といった評価を得る。但し、再結合層 (resistive layer) の厚みを $10^{-2} a$ 程度と評価した。この結果、ほとんどの散逸は P_d^i で与えられることが分かる。但し、これより高温、或は低密度の領域では平均自由行程が長くなり、古典的な ν_d は使えなくなり、 P_d^i は相対的に小さくなる。又、通常の tearing mode の様に成長率 γ が小さい場合も、 P_d^i は小さくなり、むしろ P_r^i が支配的になる。

4. 平均場による異常散逸とエネルギー損失

前節の計算は揺動 j_{\perp} 、 v_{\perp} に関する散逸の評価であったが、本節では平均場による散逸を計算し、MHD 緩和現象が支配する平衡配位では、平均場による散逸に anomaly が生じることを示そう。先ず、ヘリシティーとエネルギーのバランスの関係を整理しておく。

4-1 ヘリシティーバランスとエネルギーバランス

流体力学的な方程式系に対する所謂 *a priori* 評価の手法は、いろいろな積分物理量の時間変化に対する基礎的な法則を導くために有用である。本節ではプラズマのMHD的な記述において重要な2つの積分物理量、磁気ヘリシティーとエネルギーに関する *a priori* 評価を復習し、プラズマ理論に应用する上での両者の違いについて考察する。

プラズマ中の磁束密度 \mathbf{B} の分布はオームの法則

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -\text{rot}(\eta / \mu_0) \text{rot} \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

によって支配される。速度場 \mathbf{v} はプラズマの流体的運動方程式によって支配されているとする。もし完全導

体壁の境界条件を課すならば、境界上で電場 \mathbf{E} の接線成分が 0 となり、プラズマへの磁気エネルギー流速 (Poynting vector) は 0 となる。ここではこの様な境界条件を考えないで、プラズマは外界と磁気エネルギーを介しても結合しているとする。

式 (5) の線型散逸項 $-\text{rot}(\eta/\mu_0)\text{rot} \mathbf{B}$ は抵抗による磁気エネルギーの散逸を表す。対流型非線型項 $\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ は、プラズマの流れによって磁気エネルギーが空間的に輸送されること、及び磁気エネルギーと運動エネルギーとの相互交換を表す。

まず磁気ヘリシティーの時間変化を計算しよう。磁気ヘリシティーは放電プラズマ中の電流分布、特に磁場に平行な成分 j_{\parallel} の形成・保持のメカニズムを理解する上で重要な物理量である。A を磁束密度 \mathbf{B} のポテンシャル、即ち $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ とする。A を決定するためには適当なゲージ条件と境界条件が与えられねばならない。領域 Ω 内の磁気ヘリシティー K は

$$K = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dv$$

と定義される。K の時間変化を計算するとヘリシティーバランスの関係が導かれる。即ち、

$$dK/dt = - \int \text{div} \mathbf{F}_h \, dv - \int \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \, dv$$

但し、 $\eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B}$ (η : 抵抗率, \mathbf{j} : 電流密度) はヘリシティー散逸を表し、ヘリシティー束は $\mathbf{F}_h = -\partial_t \mathbf{A} \times \mathbf{A} + 2\phi \mathbf{B}$ (ϕ : スカラーポテンシャル) と表される。完全導体壁で囲まれた $\eta = 0$ のプラズマでは $dK/dt = 0$ 、即ちヘリシティーの保存が成り立つ。実際のプラズマでは有限な抵抗のためにヘリシティーの散逸が起こり、これを補うだけのヘリシティー注入がなくては、その平衡状態は保持できない。ヘリシティー散逸は $\eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B}$ で与えられるので、ヘリシティー散逸は j_{\parallel} の減衰を意味している。

保持された平衡に関するヘリシティーバランスの関係は

$$\int_{\Omega} \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \, dv = - \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_h \, ds$$

但し積分はプラズマの全領域 Ω に亙るとし、 Γ は Ω の表面とする。もし磁場の揺動がなく、 Γ が或磁気面であるとする、右辺の表面積分は $V_L \Phi_t$ (V_L は周回電圧, Φ_t はトロイダル磁束) となり、

$$\int_{\Omega} \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \, dx = V_L \Phi_t \quad (6)$$

を得る。ヘリシティーの評価式はオームの法則 (5) のみから導かれ、プラズマの流体的運動や熱運動と関係

しないために、極めてシンプルな関係式が得られる。

次にエネルギーの評価式を導こう。こちらの方はオームの法則とプラズマの運動方程式が $\mathbf{B} \cdot \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ を通じてカップリングするのでヘリシティ評価のように単純には行かない。流体的なプラズマのエネルギー W は

$$W = \int [B^2 / (2\mu_0) + \rho v^2 / 2 + p / (\gamma_s - 1)] dv,$$

で与えられる。但し、 ρ は質量密度、 p は熱的な圧力（電子の圧力+イオンの圧力）、 γ_s は比熱比を表す。準定常状態では入力パワー（電子のジュール加熱とイオンの粘性加熱）と損失パワー（放射や伝熱等）がバランスして、平均の意味で熱エネルギー $p / (\gamma_s - 1)$ は一定となる。残る磁気エネルギーと流体的運動エネルギーの和

$$W_{bv} = \int [B^2 / (2\mu_0) + \rho v^2 / 2] dv$$

の時間変化は

$$dW_{bv}/dt = - \int [\eta j^2 + \nu_d \Omega_d^2 + \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})] dv$$

と計算される。但し、誘導電場によるエネルギー入力 Poynting vector の項 $\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ で表現されている。誘導電場は先ず電子とカップルしてプラズマ電流を駆動し、 ηj^2 の項によって電子を加熱する。また、プラズマ電流による電磁応力によって不安定性が生じると、プラズマの運動が駆動され、 $\nu_d \Omega_d^2$ の項によってイオンが加熱される。

誘導電場によって保持された準定常状態では

$$\int_{\Omega} [\eta j^2 + \nu_d \Omega_d^2] dv = V_L I_p \quad (7)$$

となる。 I_p はトロイダル電流である。

ヘリシティバランスの式とエネルギーバランスの式とを比較し、両者の違いを整理すると表 I の様になる。

表 I : エネルギーバランスとヘリシティバランスの比較

	エネルギーバランス	ヘリシティバランス
全散逸量	$\int \eta j^2 dv + \int \nu_d \Omega_d^2 dv$	$\int \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} dv$
入力 flux	Poynting Flux	Helicity Flux
全入力	$V_L \cdot I_p$	$V_L \cdot \Phi_t$

4-2 電流密度分布の構造と異常散逸

抵抗率 η と電流密度 j の分布の関係について考えよう。2-3項で述べたように、平均場による異常散逸は、この両者の関係の“異常”によって起こる。このことを、4-1項で述べたヘリシティ及びエネルギーの評価式を用いて示そう。

まず、“異常”とは何を意味するかを“正常”と対比して示す必要がある。正常な場合、 η と j とは $\eta \cdot j$ が一定になるようにオームの法則によって関係付けられている。式(5)は、 $\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ の項がないときは、単純な拡散方程式で、この解は常に抵抗性電場 ηj が一定となる定常解に収束する。定常解は、一定の電流値 $I_P = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} ds$ (面積分はプラズマの断面に互る) に対して、全抵抗散逸 $P_{OH} = \int \eta j^2 dv$ を最小とする分布である。実際、 I_P を束縛として P_{OH} を最小化すると、 $\eta j = \text{一定}$ という Euler 方程式が得られる。

電場 \mathbf{E}_{ex} が境界条件として与えられた場合には、導体中の抵抗性電場を均一にするような変分問題でオームの法則を表すことができる。即ち汎関数

$$F = \int [\text{grad}(\eta j)]^2 dv$$

を、境界条件 $\eta j = \mathbf{E}_{ex}$ (=一定, 境界上) の下で最小化すれば上記の定常解(正常な電流分布)が得られる。この境界条件は、ヘリシティバランスの式(6)(勿論磁束 Φ_t が0でない時)、或はエネルギーバランスの式(7)(今の場合粘性散逸=0)を束縛条件とする Lagrange 型の条件と置き換えてもよい。つまり、古典的な(正常な)電流分布の変分学的な特徴付に於て、ヘリシティ入力、或はエネルギー入力を条件として与える事は、駆動電場を境界条件として与える事と等価である(図3参照)。

ダイナモ項 $\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ が

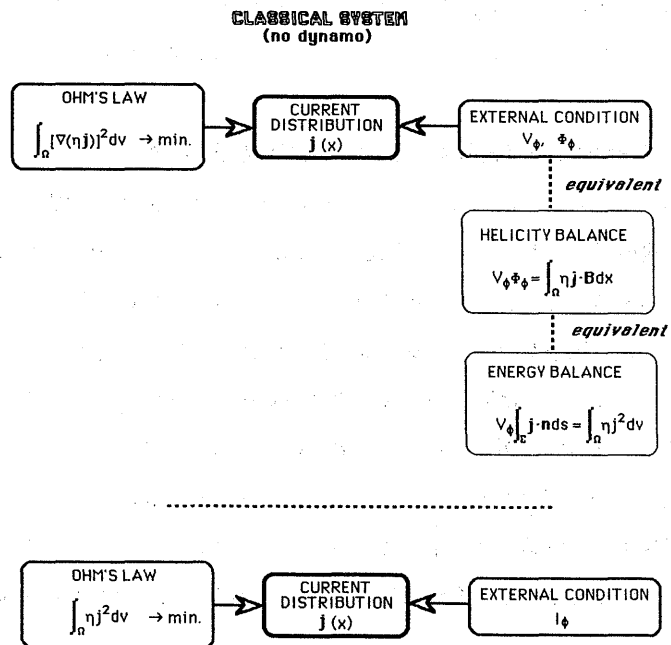


図3. ダイナモ項 $\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ を持たない系に於ける定常電流分布。内的な法則はオームの法則、外的条件は電場(上図)或は全電流(下図)。

支配的なプラズマ中ではこのような単純な関係は得られない。電場 E_{ex} で駆動される場合を考えると、この境界条件とヘリシティ入力との条件とは等価である（なぜなら、式(6)は抵抗散逸項に部分積分を行った際の境界項と内部項の關係に過ぎない）。しかし、エネルギー評価の式(7)はプラズマの運動を反映する Ω_d を含むから、明らかに電場の境界条件では尽くせない内容を持つ。又、内的な法

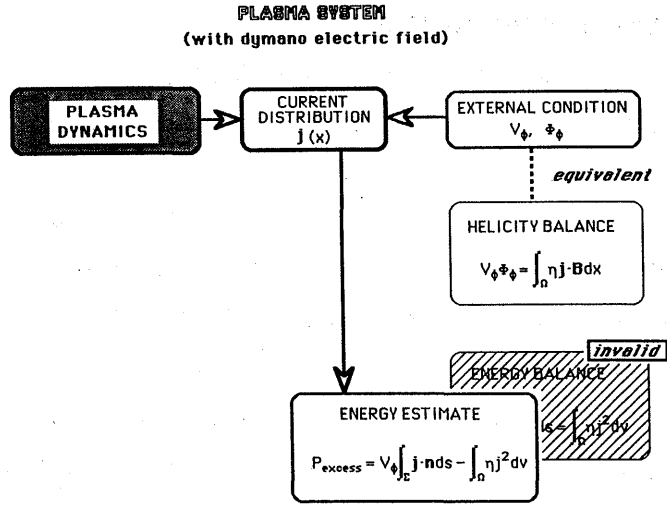


図4. ダイナモ項 $rot(v \times B)$ を持つ系に於ける定常電流分布。内的な法則はプラズマの動的特性に依存する。外的条件はヘリシティ入力として表現できる。

則も、電場が一定となるオームの法則ではなく、プラズマの力学的な法則と置き換えられる。即ち、 j の分布はプラズマが安定であり得る配位と言う部分集合の中で、ある種のエントロピー生産を最小とするような構造を持つであろう。この様にして決められた j に対してエネルギー評価(7)は *a posteriori* に成立する関係と考える必要がある(図4参照)。同じ電流値について比較すると、上記の電場=一定の場合が抵抗散逸最小であるから、当然それよりも大きな抵抗散逸が起こる筈である。

4-3 平均場による抵抗散逸と揺動による粘性散逸の分配

第3節で示したように、揺動の散逸はイオンの粘性散逸で支配されるから、式(7)の抵抗散逸はほとんど平均場の電流によるジュール散逸であるとしてよい。全散逸に対する、平均場による抵抗散逸 P_{OH} と、揺動による粘性散逸 P_d^i との分配について考えよう。4-2項で述べたように P_{OH} は η と j の分布に強く依存する。 P_{OH} の比率が最大になるのは、 $P_{OH} = \text{全入力 } P_{IN}$ 、 $P_d^i = 0$ となるときであり、古典的な電流分布 ($\eta j = \text{一定}$) に対しては明らかにこの関係が成り立つ (P_{OH}/P_{IN} を最大とする変分問題を考えるとよい)。もう一つ興味深い例がある。この場合には P_{OH} の“比率”が最大になるのみならず、与えられた電源電圧 (E_{ex}) とトロイダル磁束に対して、 P_{OH} の値自身も最大となる。変分を計算してみよう。

電場 E_{ex} で駆動された系を考えるので、ヘリシティバランスの関係を束縛として、 $P_{OH} = \int \eta j^2 dv$ を最大とする変分問題を考えればよい。境界条件に気を付けながら Euler 方程式を計算すると、

$$rot(\eta rot B) = \mu [\eta rot B + grad \eta \times B / 2] \tag{8}$$

を得る。但し、 μ は Lagrange 未定乗数である。抵抗率 η が空間的に一定の場合、この解は簡単に求められる。即ち、

$$\text{rot}\mathbf{B} = \mu\mathbf{B},$$

Taylor state である。このとき、 $P_{\text{OH}} = P_{\text{IN}}$ となる事は簡単に検証できる。 η が一定の場合、Taylor state は、与えられたヘリシティ入力（電源電圧とトロイダル磁束）に対して、最大のジュール加熱を実現する状態、換言すれば最大のエネルギーを電源から吸収する状態であることが分かる。

η が一定でない場合の解は数値計算によらねばならない。この場合、解は force-free field ではあり得ないことは簡単に分かる。実際、 $\text{rot}\mathbf{B} = \lambda\mathbf{B}$ (λ は一定である必要はない) と置き、式 (8) に代入すると、

$$\eta\lambda(\lambda - \mu)\mathbf{B} = \text{grad}[\eta(\mu/2 - \lambda)] \times \mathbf{B},$$

従って η が一定 ($\text{grad}\eta \times \mathbf{B} = 0$) でない限り解がない。

η が一定でないプラズマに於て force-free 配位に近い状態が形成される場合には、相対的に P_{OH} が小さくなる。force-free field については簡単に

$$P_{\text{OH}}/P_{\text{IN}} = \left[\int B_t ds \int \eta \lambda^2 B^2 dv \right] / \left[\int \lambda B_t ds \int \eta \lambda B^2 dx \right] \quad (9)$$

となる事が分かる。但し、 B_t は \mathbf{B} のトロイダル成分である。 B^2 は B_t よりも一般に平坦な関数である（磁気圧～一定）。もし $(\eta\lambda)$ もほぼ平坦な関数であると、ピーキングした λ に対して、 $P_{\text{OH}}/P_{\text{IN}}$ は 1 よりも小さくなり、従って P_d^i が相対的に大きくなる。Ortolani は η と λ を適当に選ぶと、 P_d^i/P_{IN} が約 50% 程度になり得ることを示している⁷⁾。このような場合、非常に強いイオンの直接加熱が起こると考えられる。一方ホロウな λ の場合や、 $(\eta\lambda)$ がピーキングしている場合には、 $P_{\text{OH}}/P_{\text{IN}}$ は 1 に近くなる。但し、これが 1 を越えるような平衡は保持できない。

5. おわりに

本稿では MHD 緩和現象とイオン直接加熱との関係について議論した。まとめると、揺動による散逸はイオンの粘性が支配しイオンの直接加熱に寄与すること、しかし平均場による異常な抵抗散逸が存在し、これは電子チャンネルを通じてのエネルギー損失を意味することを述べた。実際に前者と後者のエネルギー分配がどうなるのかは抵抗率 η の分布に強く依存する。force-free で近似するならば評価式 (9) でよい。しかし、実験的に η 及び \mathbf{j} の分布を正確に評価することは難しいので、式 (9) は実験データの評価にはあまり有用では

なからう。むしろ定性的な理解のために役立つと思われる。

揺動による散逸について、第3節では粘性散逸と抵抗散逸との比を計算し、駆動磁気再結合のような成長率が大きな不安定性の揺動については、圧縮性に伴う粘性散逸が支配的になることを示した。計算ではスラブモデルを用いたが、本質的には評価(4')のみであるから、もっと複雑な乱流状態を考えても本質的な違いはないであろう。この揺動に伴う散逸の絶対値については、エネルギーバランスの関係から、平均場による異常散逸の如何によって左右される。実験的にはプラズマ中の揺動の大きさは直接測定できないので、果してどの位のエネルギーが揺動によって散逸されているのか明らかではない。理論的には平均場の保持に必要なダイナモの強さが評価でき、それに伴う揺動の強度は、粘性散逸によってイオンの異常加熱を説明するに充分であると言う試算もあるが、まだ他の加熱機構もあるのかどうか、今後の研究の余地がある。

参 考 文 献

- 1) 吉田善章 : 核融合研究 **62** (1989) 319.
- 2) R. B. Howell and Y. Nagayama : Phys. Fluids **28** (1985) 743.
- 3) K. Ogawa, Y. Maejima, T. Shimada, Y. Hirano and Y. Yagi : Nucl. Fusion **25** (1985) 1295.
- 4) P. G. Carolan, *et al.* : in Proc. 14th Eur. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Madrid, Vol. II (EPS, 1987) 469.
- 5) H. A. B. Bodin : in Proc. Workshop " Physics of Mirrors, Reversed Field Pinches and Compact Tori " , Vol. I (Varenna, 1987) 307.
- 6) Y. Kamada, *et al.* : Nucl. Fusion **29** (1989) 713.
- 7) S. Ortolani : Plasma Phys. Controlled Fusion **31** (1989) 1665.
- 8) C. G. Gimblett : Europhys. Lett. **11** (1990) 541.
- 9) A. Hasegawa : Adv. Phys. **34** (1985) 1.
- 10) R. Horiuchi and T. Sato : Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 211.
- 11) J. B. Taylor : Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 1139.
- 12) E. J. Caramana, R. A. Nebel and D. D. Schnack : Phys. Fluids **26** (1983) 1305.
- 13) T. Sato and T. Hayashi : Phys. Fluids **22** (1979) 1189.
- 14) T. Sato, R. Horiuchi and K. Kusano : Phys. Fluids **B1** (1989) 255.
- 15) 吉田善章 : 核融合研究 **60** (1988) 54.
- 16) S. I. Braginskii : in Reviews of Plasma Physics, Vol. 1 (Consultants Bureau, New York, 1965) 205.