



3. プラズマの分光測定入門 (Ⅳ)

大塚 正 元

(名古屋大学プラズマ研究所)

(1985年9月7日受理)

Introduction to the Spectroscopic Measurement of Plasmas (IV)

Masamoto Otsuka

(Received September 7, 1985)

(ii) 干渉性照明の場合には式(62)でのすべての C_j を C に等しいとして、式(66)は(あるいは式(65)から直ちに)

$$\langle |V(\xi, \eta)|^2 \rangle = \left| \sum_{j=1}^N \langle V_j(\xi, \eta) \rangle \right|^2 \quad (6-89)$$

となる。(i)と同様にして和を積分でおきかえ、式(70)以下と類似の手続きで

$$\tilde{U}(\mu, \Delta\sigma_x) = \Delta\sigma_x J(\mu) / \int_{-\infty}^{\infty} J(\mu) d\mu, \quad (6-90)$$

$$J(\mu) \equiv \frac{1}{\pi^2} [\text{Si}(b+a\mu) + \text{Si}(b-a\mu)]^2 \quad (6-91)$$

となる。分母の積分(附録V-1)を見よ)

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(\mu) d\mu = \frac{2\Delta\sigma_x}{\pi} \int_0^b \left(\frac{\sin p}{p} \right)^2 dp = \frac{2\Delta\sigma_x}{\pi} \left[\text{Si}(2b) - \frac{\sin^2 b}{b} \right] \quad (6-92)$$

を入れ、添字COをつけて、干渉性照明の場合に対し

$$\tilde{U}_{CO}(\mu, \Delta\sigma_x) = \frac{[\text{Si}(b+a\mu) + \text{Si}(b-a\mu)]^2}{2\pi [\text{Si}(2b) - \sin^2 b/b]} \quad (6-93)$$

を得る。これも、 $w_x \rightarrow \infty$ では、(i)の場合と同様に $U(\mu, \Delta\sigma_x)$ に等しくなる。図32は文献22より引用したもので、 $\tilde{U}_{CO}(\mu, \Delta\sigma_x)$ 、あるいは $J(\mu)$ をそれぞれの最大値との比の形で(これも文献には、明示されていないが)示してある。bの値によっては自己反転(self-reversal, 光源自身の吸収によってスペクト

ル線の中心部がくぼむこと)を生じているかのように見える場合があることを示している。

上記では入口スリットに一次光源として点光源が分布している場合を考えたが、干渉性照明の一例として z 方向に進む平面波が入口スリットに入射する場合を次に考える。この時には分光器に入る光は入口スリットの開口を断面とした平行光束であるが、 Δx が小さい場合は回折によってひろがり、その方向は x 成分をもつようになる。(y 方向については Δy が波長に比べて大きいので回折は無視できる)。従って Δx が十分小さくなればしぼり面での光束のひろがり w_x を超え、入射放射束の一部が失われる。この効果は透過率

$T(\lambda_0)$ の減少という形で新に考慮されねばならない。式(93)の $\tilde{U}_{co}(\mu, \Delta\sigma_x)$ はこのように修正された $T(\lambda_0)$ を用いた際に適用されるべきものである。

図33において入口スリット面での点 $Q(x)$ を通りしぼり面上の点 $P(X)$ を通過するように回折する光と、 F_1 を通って P に到る回折光との干渉を考える。 Δx は十分小さいためこれらの光線はほぼ平行であると考えられる。式(62)の場合と同様の手続きを行うと、 $w_x \rightarrow \Delta x$, $f_2 \rightarrow f_1$, $\xi \rightarrow X$, $x/f_1 \rightarrow 0$ の置きかえにより、 $P(X)$ での振幅 $F(X)$ は

$$F(X) = C' \Delta x \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \tag{6-94}$$

$$\alpha = \frac{kX\Delta x}{2f_1} \tag{6-95}$$

となる。 C' は比例定数である。従ってしぼりに入る放射束は

$$\int_{-w_x/2}^{w_x/2} |F(X)|^2 dX = |C'|^2 \frac{2\lambda_0 f_1 \Delta x}{\pi} \cdot \int_0^b \left(\frac{\sin p}{p}\right)^2 dp \tag{6-96}$$

に比例する。 $w_x \rightarrow \infty$, 即ち $b \rightarrow \infty$ で、この値は入口スリットに入射する放射束に等しくなるはずであるから

$$|C'|^2 \frac{2\lambda_0 f_1 \Delta x}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \Delta x \tag{6-97}$$

から $|C'|^2$ が定まる。故に入口スリットでの回折損による透過率 $T_D(\lambda_0)$ は

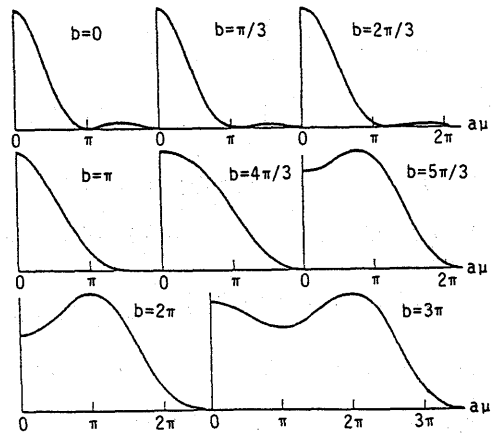


図32. $\tilde{U}_{co}(\mu, \Delta\sigma_x)$ の相対値. $\tilde{U}_{co}(\mu, \Delta\sigma_x)$ の値を最大値での値が同じになるように規格化して示してある。

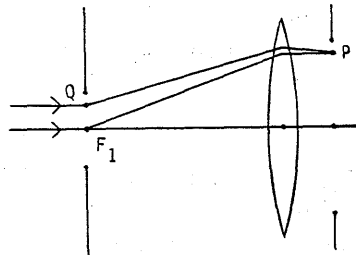


図33. 平行光線の入口スリットでの回折. 光学系は図29と同じである。

$$T_D(\lambda_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^b \left(\frac{\sin p}{p} \right)^2 dp$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(2b) - \frac{\sin^2 b}{b} \right] \quad (6-98)$$

となる。以上をまとめて、放射発散度 K_0 の平行光線が入口スリットに垂直に入射した場合、出口スリット面上での波長尺度で μ の位置での単位波長あたりの放射束密度 $G(\mu)$ は

$$G(\mu) = K_0 \Delta x \Delta y T_D(\lambda_0) T(\lambda_0) \frac{1}{\Delta \sigma_x} \tilde{U}_{c_0}(\mu, \Delta \sigma_x) \quad (6-99)$$

与えられることがわかる。ここで $T(\lambda_0)$ は回折損以外の原因による透過率である。従ってこの場合、(i)の $\tilde{U}_{1N}(\mu, \Delta \sigma_x)$ に対応するものは

$$T_D(\lambda_0) \tilde{U}_{c_0}(\mu, \Delta \sigma_x) = J(\mu) \quad (6-100)$$

である。Cittert はスペクトル線像の強度分布として(i)の場合には式(79)を、(ii)の場合には(回折損に言及することなく)式(91)を与えているが

$$\frac{1}{\Delta \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_{1N}(\mu, \Delta \sigma_x) d\mu = 1 \quad (6-101)$$

となるのに反し、

$$\frac{1}{\Delta \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} J(\mu) d\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^b \left(\frac{\sin p}{p} \right)^2 dp < 1 \quad (6-102)$$

となるのは、上述のように回折損に原因がある。

図34は $J(0)$ と $J(\mu)$ の最大値 J_{MAX} ならびに $\tilde{U}_{c_0}(0, \Delta \sigma_x)$ あるいは $J(\mu)$ の半値幅 H_{c_0} を示す²²⁾*。半値幅の表示は式(85)の場合と同様であり、比較のため H_{1N} もあわせて示されている。 $b \rightarrow 0$ の極限では $\tilde{U}_{c_0}(\mu, \Delta \sigma_x)$ も

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \sigma_x} \tilde{U}_{c_0}(\mu, \Delta \sigma_x)$$

$$= \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin a\mu}{a\mu} \right)^2 \quad (6-103)$$

となるので $H_{c_0}(b=0)$ は $H_{1N}(b=0)$ に一致する。 $b \geq 4\pi/3$ に対しては

$$H_{c_0}(b) = b - 0.27\pi \quad (6-104)$$

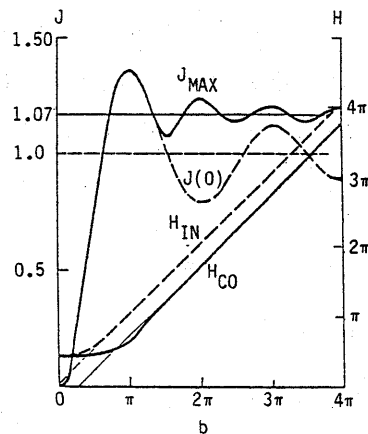


図34. $J(0)$, J_{MAX} ならびに半値幅 H_{c_0} , H_{1N} . 前二者には左の縦軸を、半値幅には右の縦軸を適用する。

* 久保田広：応用光学(岩波, 1959)p.137にも半値幅の図が載っているが縦座標値に誤りがある。

で近似される²²⁾。この図から、同じスリット幅に対しては $H_{IN} > H_{CO}$ であり、限界幅については、(i)の場合の入口スリットの限界幅 $b = \pi/2$ に対し(ii)の場合には $b = \pi$ であることがわかる。

スリット幅をこれらの限界値に設定するには次のようにすればよい。x方向のひろがりの小さい光源(例えばペンレイランプ)を入口スリットの前方数十cmの距離($=\ell$)の位置に置き、特定の波長位置に設定して出口スリットを大きく開いてそこから分光器内をのぞき込むと回折格子面上で光源の幅の f_1/ℓ 倍程の部分が照らされているのが見える。照射部分が回折格子の中央に位置するように光源の位置を調整した上で、スリット幅を狭めると、回折により照射部分がひろがる。照射部分の端が回折格子の端に来た時は式(94)、(95)で $\alpha = \pi$, $X = \omega_x/2$ に、従って式(80)により $b = \pi$ に相当する。

非干渉性照明の実例としては、平面状の光源(例えばリボンフィラメント電球)を鮮明に入口スリット面上に結像した場合が挙げられる。光源面上の各点は互に独立に光を放射しており、完全な光学系によって光源面の点とスリット面上の点とが一对一に対応していると考えられるからである。干渉性照明としてはレーザー光やよく調整された平行光線による照明以外では、スリット面から遠方におかれた小さい光源によって照射される場合に干渉性照明に近い部分的干渉性の照明が得られる。半径 ρ の一様な放射輝度をもった光源がスリットの前方Rの位置におかれている場合、鮮明度が0.88以上の干渉縞が得られる程度の干渉性のある照射部分の直径dは、干渉の理論²⁴⁾によれば

$$d \leq 0.16 \frac{R \lambda_0}{\rho} \tag{6-105}$$

で与えられる。この式は図35に示す二つの光線の光路差 $QP_2 - QP_1 \approx \rho d/R$ が λ_0 に比べて十分小さいことを意味している。

(iii) プラズマのように奥行のある光源の場合には、集光レンズでスリット面上に光源の像を結んでも、スリット面の共役面以外からの光はスリット面上のある広がった部分を照らすので、この部分の光は干渉性をもつ。従って入口スリット幅を限界にまでせばめると、スリットによる回折損が生じる。この場合に式(43)や(44)によってプラズマ光の放射輝度を決定しようとするとき $T_D(\lambda_0)$ に係る誤差を生ずるかそがある。しかしながら光源が十分なひろがりをもってしている場合には次に示すように非干渉性照明と考えて差し支えない。

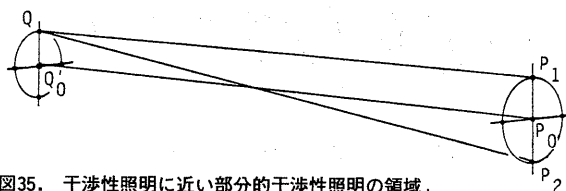


図35. 干渉性照明に近い部分的干渉性照明の領域。

$$\begin{aligned} Q_0 Q &= \rho, \quad Q_0 P_0 = R, \quad P_1 P_2 = d \\ QP_2 - QP_1 &= [R^2 + (\rho + d/2)^2]^{1/2} - \\ &= [R^2 + (\rho - d/2)^2]^{1/2} \approx \rho d/R. \end{aligned}$$

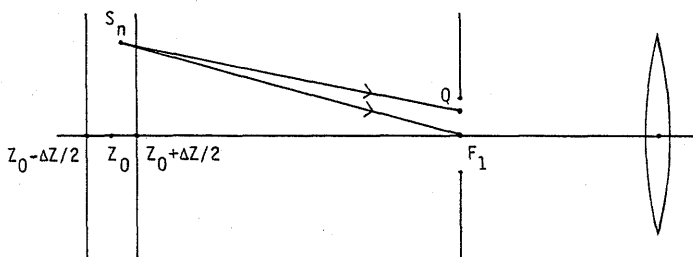


図36. 平板状光源による照射.

S_n : 光源内の n 番目の点光源. 光学系は図29と同じである.

図36に示すように、同じ放射強度 J をもつ単色光の多くの点光源が入スリットから遠くはなれた位置で入口スリット面に平行な平板状に一樣な密度 ρ_s で分布している場合を考える. n 番目の点光源 S_n の座標を F_1 を原点として E_n, H_n, Z_n とすると、この光源から入口スリット面上の点 $Q(x, y)$ に入射する光は、原点 F_1 に入射する光に比べ $(x E_n + y H_n) / |Z_n|$ だけ光路が短いのでその位相因子は

$\exp[-2\pi i (x E_n + y H_n) / (\lambda_0 |Z_n|)]$ となる. 前述の(ii)の場合で式(65)から式(89)に進む際には C_j をすべて等しいとしたが、今の場合はこの位相因子でおきかえることにより、光源 S_n によって出口スリット面上の点 $A(\xi, \eta)$ に生じる光波の振幅 $V_n(\xi, \eta)$ として

$$V_n(\xi, \eta) = \frac{C_n J^{1/2}}{|Z_n|} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda_0 |Z_n|} (x E_n + y H_n)\right] \quad (6-106)$$

を得る. ここで、 α, β は式(63)での添字 j を除いたものであり、 C_n は比例定数であって、 $|C_n| = C$ であり、 $J^{1/2} / |Z_n|$ は S_n からの球面波の振幅が $S_n F_1$ に反比例することを $S_n F_1 \approx |Z_n|$ によって近似した形である.

$$\langle |V(\xi, \eta)|^2 \rangle = \langle \left| \sum_n V_n(\xi, \eta) \right|^2 \rangle \quad (6-107)$$

の計算において $n \neq m$ に対しては $\langle C_n C_m^* \rangle = 0$ とし、 \sum_n を積分でおきかえて

$$\langle |V(\xi, \eta)|^2 \rangle = |C|^2 J \rho_s \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dH \int_{Z_0 - \frac{\Delta Z}{2}}^{Z_0 + \frac{\Delta Z}{2}} \frac{dZ}{Z^2} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx' \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy' I_x I_y \quad (6-108)$$

となる. ここで Z_0 は平板の中心位置、 ΔZ はその厚さであり、

$$\left. \begin{aligned} I_x &\equiv \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda_0 |Z|} (x' - x) E\right] \\ I_y &\equiv \frac{\sin \beta}{\beta} \cdot \frac{\sin \beta'}{\beta'} \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda_0 |Z|} (y' - y) H\right] \end{aligned} \right\} \quad (6-109)$$

とおいた、 α' 、 β' は α 、 β の中の x 、 y を x' 、 y' で置きかえたものである。 E 、 H についての積分に公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i x \alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \delta(x) \quad (6-110)$$

を用いると

式(108)は

$$\langle |V(\xi, \eta)|^2 \rangle = |C|^2 \lambda_0^2 \rho_s J \Delta Z \cdot \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 dx \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 dy \quad (6-111)$$

に帰せられる。これは式(69)と同形だから以後同じ手続きに従って、この場合の $\widetilde{U}(\mu, \Delta \sigma_x)$ は $\widetilde{U}_{1N}(\mu, \Delta \sigma_x)$ に等しいことがわかる。

入射スリットによる回折損については、式(94)の場合にならって考えると、 S_n からの入射光の z 軸との傾きによる光路差を考慮に入れて、 $P(X, Y)$ での振幅 $F_n(X, Y)$ は

$$F_n(X, Y) = \frac{\sqrt{J}}{|Z_n|} C'_n \Delta x \Delta y \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} \frac{\sin \beta_n}{\beta_n} \quad (6-112)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{k \Delta x}{2} \left(\frac{E_n}{|Z_n|} + \frac{X}{f_1} \right) \\ \beta_n &= \frac{k \Delta y}{2} \left(\frac{H_n}{|Z_n|} + \frac{Y}{f_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6-113)$$

となる。従って光源 S_n からしぼりに入る放射束 Φ_n は

$$\Phi_n = \int_{-w_x/2}^{w_x/2} dX \int_{-w_y/2}^{w_y/2} dY \langle |F_n(X, Y)|^2 \rangle \quad (6-114)$$

で与えられる。 $w_x \rightarrow \infty$ 、 $w_y \rightarrow \infty$ で Φ_n は入射放射束 $J \Delta x \Delta y / Z_n^2$ に等しいという条件により

$$\langle |C'_n|^2 \rangle = (\lambda_0 f_1)^{-1} \text{が定まり}$$

$$\Phi_n = \frac{J \Delta x \Delta y}{Z_n^2 \pi^2} I_x I_y \quad (6-115)$$

$$\left. \begin{aligned} I_x &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} U\left(\alpha - \frac{\pi \Delta y E_n}{\lambda_0 |Z_n|}, 2b_x\right) \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha \\ I_y &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} U\left(\beta - \frac{\pi \Delta y H_n}{\lambda_0 |Z_n|}, 2b_y\right) \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2 d\beta \end{aligned} \right\} \quad (6-116)$$

となる。こゝで

$$b_x \equiv \frac{\pi w_x \Delta x}{2 \lambda_0 f_1}, \quad b_y \equiv \frac{\pi w_y \Delta y}{2 \lambda_0 f_1} \quad (6-117)$$

である。 S_n から入口スリットの開口 $\Delta x \times \Delta y$ を見込む立体角がしぼり $w_x \times w_y$ を見込む立体角中に含まれる時には、式(115)から $I_x I_y / \pi^2$ は S_n からの入射光に対する回折損にもとづく透過率を表すことがわか

る。通常は $\Delta y \gg \lambda_0$ であり従って $b_y \gg \pi$ となるので $H_n \approx 0$ の点光源に対しては $I_y \approx \pi$ となり透過率は I_x / π となる。式(98)はこの場合において $E_n = 0$ とおいたものに該当する。 S_n で張られる立体角の関係が、上記の条件を満たさない時には、入射光の一部は回折損によって失われるが、一方幾何学的にはしぼりに入らない光が回折によりしぼりに入ることも起る。光源が E, H 方向に十分大きなひろがりをもって

いる時には、しぼりに入る全放射束 Φ は

$$\Phi = \sum_n \Phi_n = \rho_s \int_{Z_0 - \Delta Z/2}^{Z_0 + \Delta Z/2} dZ \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dH \frac{J \Delta x \Delta y}{Z^2 \pi^2} I_x I_y = \rho_s J \Delta Z \frac{w_x w_y}{f_1^2} \Delta x \Delta y \quad (6-118)$$

となる。ここでの I_x, I_y は式(116)での添字 n を除いたものであり、 E, H についての積分の際には式(12)を用いた。式(118)の $\rho_s J$ は放射係数、 $\rho_s J \Delta Z$ は放射輝度を表すから Φ は $I_L \omega \Delta x \Delta y$ と同じである。即ちプラズマのような輿行をもった光源が分光器できまる入射立体角よりも大きいひろがりをもって

いる時には、入口スリットでの回折を考慮することなく、且つ非干渉照明として取扱えることがわかる。

6.3.2 非干渉性照明の場合のスリット関数

式(78)を式(58)に入れることにより、非干渉性照明の場合のスリット関数 $\tilde{S}_{IN}(\sigma)$ として

$$\tilde{S}_{IN}(\sigma) = \frac{1}{\pi \Delta \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(p + a(\mu - \sigma), 2b) \left(\frac{\sin p}{p} \right)^2 U(\mu, \Delta \sigma_x) d\mu dp \quad (6-119)$$

を得るが、式(12)、(20)を用いて

$$\tilde{S}_{IN}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\sigma - \mu) \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin a\mu}{a\mu} \right)^2 d\mu \quad (6-120)$$

と変形できる。式(120)は $\tilde{S}_{IN}(\sigma)$ が幾何光学のスリット関数 $S(\sigma)$ と無限小幅スリットのフラウンホーフェル回折像、式(86)、とのたゞみこみで与えられることを示す。 $S(\sigma)$ の陽な形式(24)を入れて積分を行うと $\Delta \sigma_x, \Delta \sigma_x$ の大小関係にかゝりなく

$$\tilde{S}_{IN}(\sigma) = \frac{1}{4\pi b} \left[F(2(p+A)) + F(2(p-A)) - F(2(p+B)) - F(2(p-B)) \right] \quad (6-121)$$

を得る。ここで

$$p \equiv a\sigma, \quad c \equiv a \Delta \sigma_x / 2$$

$$A \equiv c + b$$

$$B \equiv c - b$$

(6-122)

$$F(x) \equiv x \text{Si}(x) + \text{Cm}(x) + \cos x,$$

$$\text{Cm}(x) \equiv \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

である。 $\text{Cm}(x)$ は積分余弦関数 $\text{Ci}(x)$ と

$$\text{Cm}(x) = \text{Ci}(x) - \gamma - \ln|x| \quad (6-123)$$

の関係にある。γはオイラー(Euler)の数0.5772156649...である。

式(121)をpの巾に展開し

$$\widetilde{S}_{IN}(\sigma) \equiv \frac{1}{2\pi b} (P + Qp^2 + \dots) \tag{6-124}$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} P &= F(2A) - F(2B) \\ Q &= H(2A) - H(2B) \\ H(x) &\equiv \frac{2(1 - \cos x)}{x^2} \end{aligned} \right\} \tag{6-125}$$

である。

$$\alpha \equiv -\frac{Q}{P} \tag{6-126}$$

と置いて

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{S}_{IN}(\sigma) &= \frac{P}{2\pi b} f(p) \exp(-\alpha p^2), \\ f(p) &= 1 + (p \text{ の } 4 \text{ 次以上の項}) \end{aligned} \right\} \tag{6-127}$$

の形にした時、f(p)が1に近ければ $\widetilde{S}_{IN}(\sigma)$ は近似的にガウス形(gaussian)となる。入口スリット幅が与えられた時f(p)が1に近くなるように出口スリット幅を選んで見ると $b \lesssim \pi$ では比較的よい近似を与えるcを選ぶことができる。その例として表3には $b = 0.5\pi$, $c = 0.45\pi$ ならびに $b = \pi$, $c = 0.75\pi$ の場合を示す。表中 $S(p) \equiv 2\pi b \widetilde{S}_{IN}(\sigma) / P = f(p) \exp(-\alpha p^2)$ であり、括弧の中の値はf(p)である。最後の行の $p_{1/2}$ は半値幅($\exp(-\alpha p_{1/2}^2) = 1/2$)を示す。bの大きい値に対してはこのような近似はできない。

6.3.3 干渉性照明の場合のスリット関数

干渉性照明の場合には式(58)に式(93)を入れてスリット関数 $\widetilde{S}_{Co}(\sigma)$ として

$$\widetilde{S}_{Co}(\sigma) = \frac{I}{2\pi \Delta \sigma_x [\text{Si}(2b) - (\sin^2 b)/b]} \tag{6-128}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} U(\mu, \Delta \sigma_x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} U(x - a(\sigma - \mu), 2b) dx \right]^2 d\mu \tag{6-129}$$

を得る。この場合には入口、出口両スリットに関するU関数はたゞみこみにはならない。Iの積分を行うと(附録IV-2を見よ)両スリット幅の大小関係にかゝわらず

$$\begin{aligned} aI &= p[K(p)^2 - K(-p)^2] + K(p) \{ \text{ASi}(p+A) - \text{BSi}(p+B) + 2 \{ \cos(p+A) - \cos(p+B) \} \} \\ &\quad - K(-p) \{ \text{ASi}(p-A) - \text{BSi}(p-B) + 2 \{ \cos(p-A) - \cos(p-B) \} \} \\ &\quad - [1 - \cos(A-B)] \{ \text{Si}(2(p+A)) - \text{Si}(2(p-A)) + \text{Si}(2(p+B)) - \text{Si}(2(p-B)) \} \\ &\quad - \sin(A-B) \{ \text{Cm}(2(p+A)) + \text{Cm}(2(p-A)) - \text{Cm}(2(p+B)) - \text{Cm}(2(p-B)) \} \\ &\quad + (A-B) \{ G(p+B, A-B) - G(p-A, A-B) + G(-p+B, A-B) - G(-p-A, A-B) \} \end{aligned}$$

表3. スリット関数のガウス近似の例

$$S(p) \equiv 2\pi b \tilde{S}_{1N}(\sigma)/P = f(p) \exp(-\alpha p^2).$$

例えば 9.8386125-01 は 9.8386125×10^{-1} を意味する.

b/π	0.50	1.0
c/π	0.45	0.75
p/π	$S(p)$ ($f(p)$)	$S(p)$ ($f(p)$)
0.00	1.0000000+00 (1.0000000+00)	1.0000000+00 (1.0000000+00)
0.10	9.8386125-01 (9.9999158-01)	9.9385372-01 (1.0000063+00)
0.20	9.3689703-01 (9.9986604-01)	9.7571246-01 (1.0001007+00)
0.30	8.6326831-01 (9.9932832-01)	9.4643360-01 (1.0004896-00)
0.40	7.6929229-01 (9.9790960-01)	9.0729556-01 (1.0014589+00)
0.50	6.6262476-01 (9.9501558-01)	8.5985036-01 (1.0032974+00)
0.60	5.5131096-01 (9.9002515-01)	8.0572764-01 (1.0061855+00)
0.70	4.4285449-01 (9.8247840-01)	7.4649952-01 (1.0100965+00)
0.80	3.4344421-01 (9.7242358-01)	6.8358745-01 (1.0146856+00)
0.90	2.5743665-01 (9.6101900-01)	6.1824743-01 (1.0192116+00)
1.00	1.8715202-01 (9.5157584-01)	5.5161529-01 (1.0225004+00)
1.10	1.3296811-01 (9.5128061-01)	4.8478693-01 (1.0229721+00)
1.20	9.3663623-02 (9.7402329-01)	4.1889834-01 (1.0187504+00)
1.30	6.6926446-02 (1.0451013+00)	3.5517189-01 (1.0078701+00)
1.40		2.9490472-01 (9.8858727-01)
1.50		2.3939518-01 (9.5979082-01)
1.60		1.8982031-01 (9.2149354-01)
1.70		1.4709102-01 (8.7535610-01)
1.80		1.1172416-01 (8.2519235-01)
1.90		8.3761126-01 (7.7735728-01)
2.00		6.2759086-02 (7.4094400-01)
$P_{1/2}/\pi$	6.5286893-01	1.0597794+00

$$K(p) \equiv \text{Si}(p+A) - \text{Si}(p+B),$$

$$G(x, y) \equiv \int_0^x \frac{\sin t}{t} \text{Si}(t+y) dt$$

(6-130)

となる. $p, A, B, C_m(x)$ は式(122)に示したものである.

式(129)の被積分関数のうち x に関する積分は出口スリット面上の光の振幅に比例した量であるから,

Iは、写真乾板や、光電子増倍管の光電面などの光の振幅の二乗に対して応答する検出器が出口スリット面上におかれた時、検知される信号を誘起する光の放射束に比例した量である。光電面が出口スリット面からはなれた所に置かれている場合は、光電面上の光の振幅分布は出口スリット面での分布とは異っているが、出口スリットからひろがって出る光線を全部受けとめられる程度に光電面が広ければエネルギーの保存から考えて誘起される信号は変わらないはずであるから式(128)はこの場合にもスリット関数として適用できるものである。実際、出口スリット上での振幅分布 $V(\xi)$ が与えられた時、そこからはなれた面上での振幅分布は、入口スリットによる回折損の場合と同様に考えると、 $V(\xi)$ のフーリエ変換となるから、パーセバルの定理からそれらの絶対値の二乗の積分は互に等しい。文献25のp. 48では、出口スリットの近くでスリットから出る光路中にレンズを置いて分光器のしぼりの像を検出器上に結んだ時に、式(129)に代る表現として、本稿での記号で書き表して

$$\left[\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(a\mu - x, a\Delta\sigma_x) U(x - y, 2b) \frac{\sin y}{y} dx dy \right]^2$$

を挙げているが*、これは誤りである。実際、上記光学系での像面上の振幅分布を計算すれば式(129)が得られる。

6.3.4 分光写真機のスペクトル像

分光写真機はモノクロメーターの出口スリットを取りはずして出口スリット面に写真乾板の類をおいたものとみなされる。写真乾板の黒化の程度、即ち写真濃度 (photographic density) は乾板面上の単位面積あたりに入射した放射エネルギー、従って放射照度に依る。6.3のはじめで述べたように放射輝度が I_L の単色光の場合には出口スリット面上での放射束の単位波長尺度あたりの密度は $T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y I_L \tilde{U}(\mu, \Delta\sigma_x) / \Delta\sigma_x$ で与えられる。非点収差のない分光器では、入口スリットの長さ Δy に対応する出口スリット面上の像の長さは $M\Delta y$ であり、出口スリット面での座標 ξ と波長尺度 μ との間には式(18)の関係があるので、出口スリット面上で波長尺度 μ の位置での放射照度は

$$\begin{aligned} E(\mu) &= T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y I_L \tilde{U}(\mu, \Delta\sigma_x) \frac{1}{\Delta\sigma_x} \cdot \frac{1}{M\Delta y} \cdot \frac{1}{D} \\ &= \frac{\omega}{M^2} T(\lambda_0) I_L \tilde{U}(\mu, \Delta\sigma_x) \end{aligned} \quad (6-131)$$

となる。ここで式(19)を用いた。光源が単色光でない場合には式(55)のもとである式(13)から、式(4)、(5)、(12)、(18)、(19)を用いて得られる

* 原式はEq.(27): $r_{\text{coh}}(z) = [\text{rect}(z/w') \otimes \text{rect}(fz/f'w) \otimes \text{sinc}(z)]^2$ であるが、 z は無次元、 f, f', w は長さの次元をもっているため、 rect の変数が無次元でないことから明かなように、この式は変数に掛る係数に誤りがあり、 $[\text{rect}(f'\lambda z/w'D) \otimes \text{rect}(f\lambda z/wD) \otimes \text{sinc}(z)]^2$ と修正されるべきものと思われ、これを変形して本文中の式が得られる。

$$\Phi = \omega \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta \sigma_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} T(\lambda) I(\lambda) U(\mu - \sigma, \Delta \sigma_x) d\sigma \right] U(\mu, \Delta \sigma_x) d\mu \quad (6-132)$$

と式(55)とを比較することにより

$$E(\mu) = \frac{\omega}{M^2} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\lambda) I(\lambda) \tilde{U}(\mu - \sigma, \Delta \sigma_x) d\sigma \quad (6-133)$$

であることがわかる。ここで $\lambda = \lambda_0 + \sigma$ である。連続スペクトル光の場合には、 $\tilde{U}(\mu - \sigma, \Delta \sigma_x)$ が0でない領域、即ち μ を中心として $\pm \Delta \sigma_x$ の幅の領域では、 $I(\lambda)$ 、 $T(\lambda)$ は一定、と考えられるので式(57)によって

$$E(\mu) = \frac{\omega}{M^2} T(\lambda_0 + \mu) I(\lambda_0 + \mu) \Delta \sigma_x \quad (6-134)$$

となる。線スペクトル光の場合には式(35)を入れて

$$E(\mu) = \frac{\omega}{M^2} T(\lambda_0) I_L \int_{-\infty}^{+\infty} P(\sigma) \tilde{U}(\mu - \sigma, \Delta \sigma_x) d\sigma \quad (6-135)$$

となる。

分光器の光学系が正弦条件(式(4-11))を満している時には、入射角 θ で入口スリットに入った光が入射角 θ' で出口スリットから出るとして式(10)に対応して

$$\omega' \equiv \int_{\Omega'} \cos \theta' d\Omega' \quad (6-136)$$

を定義すると

$$\frac{\omega}{M^2} = \omega' \quad (6-137)$$

となる。ここで Ω' は出口スリット中心で有効立体角である。従って放射照度はカメラレンズ(あるいはカメラ鏡)の口径比(直径/焦点距離)の二乗に比例して大きくなる。

6. 3. 5 写真濃度測定でのスリット幅の影響

現像された写真乾板上の記録は濃度計(densitometer)で写真濃度を測定することにより定量化される。この際、濃度計において、乾板上の測定部分をえらび出すためのスリットは、撮影に用いた分光写真機の入口スリットと対にして考えた場合、モノクロメーターでの出口スリットと同じ役割を果している。しかしながら写真乾板の放射エネルギー検出器としての応答が放射エネルギーに比例しないため、以下に示すように両スリットの機能をスリット関数の形にまとめて取扱うことはできない。

現像された乾板の透過率を T_p とした時、写真濃度 D_p は

$$D_p = \log_{10} \left(\frac{1}{T_p} \right) \quad (6-138)$$

で定義される。 T_p 、従って D_p は与えられた感光材料に対し一定の条件の下で現像を行った場合には、放射照度 E 、露光時間 t 、照射光の波長 λ の関数である。濃度の測定を行う場合に、濃度計のスリットによって選び出される乾板上の幅を $\Delta \xi$ 、この幅の中心位置でのスペクトルの波長目盛を λ 、中心位置から ξ' の距離

に対応する波長目盛を λ' , この位置での透過率を $T_p(\lambda')$ とすると, スリットの長さ方向の透過率の変化はないものとして, 濃度計で検出される光量は, 測定のために乾板を照射する光の放射束に, 平均透過率

$$\bar{T}_p(\lambda) = \frac{1}{\Delta\xi} \int_{-\Delta\xi/2}^{\Delta\xi/2} T_p(\lambda') d\xi' \quad (6-139)$$

をかけたものであるから, λ での写真濃度として記録される量 $\tilde{D}_p(\lambda)$ は

$$\tilde{D}_p(\lambda) = \log_{10} \frac{1}{\bar{T}_p(\lambda)} \quad (6-140)$$

であり, これは $D_p(\lambda)$ でもなく, 上記の意味での平均値 $\bar{D}_p(\lambda)$ でもない。

連続スペクトル光の場合のように, $T_p(\lambda')$ が $\Delta\xi$ の幅の間では λ 一定と見なされる場合には, 式(139)は単に

$$\bar{T}_p(\lambda) = T_p(\lambda) \quad (6-141)$$

となり, 式(140)から

$$\tilde{D}_p(\lambda) = D_p(\lambda) \quad (6-142)$$

となる。乾板の特性曲線, 即ち D_p の関数形

$$D_p = F(E, t, \lambda) \quad (6-143)$$

が既知ならば, 逆に解いて

$$E = F^{-1}(D_p, t, \lambda) \quad (6-144)$$

が求められ, 更に式(134)を用いて $I(\lambda)$ がわかる。

線スペクトル光の場合で, $\Delta\xi$ にわたる $T_p(\lambda')$ の変化が無視できないときには, 式(139)から $T_p(\lambda)$ を求めねばならない。スペクトル線の中心波長が λ_0 で, この近傍では一定の波長分散 D のスペクトル写真が得られているとすると, $\lambda = \lambda_0 + \sigma$ として, 式(139)は

$$\bar{T}_p(\lambda_0 + \sigma) = \frac{1}{\Delta\sigma_\xi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mu - \sigma, \Delta\sigma_\xi) T_p(\lambda_0 + \mu) d\mu \quad (6-145)$$

となる。 $\Delta\sigma_\xi = \Delta\xi / D$ である。これは, $U(\mu, \Delta\sigma_\xi)$ と $T_p(\lambda_0 + \mu)$ とのたゞみこみであるから, これをくりひろげ (deconvolute)* た形を記号的に

$$T_p(\lambda_0 + \mu) = \Delta\sigma_\xi U^{-1}(\Delta\sigma_\xi) \bar{T}_p(\lambda_0 + \mu) \quad (6-146)$$

と書き, 式(140), (138), (144)を用いて

$$E(\lambda) = F^{-1}\left(-\log_{10}(\Delta\sigma_\xi U^{-1}(\Delta\sigma_\xi) 10^{-\tilde{D}_p(\lambda)}), t, \lambda_0\right) \quad (6-147)$$

* convolution には “たたみこみ” という訳語があるのに, deconvolution には今のところ訳語はないようである。さしあたり上記のように訳してみた。

を得、更に式(135)をくりひろげて $I(\lambda)$ が求められることとなる。この複雑な手続きを避けるには $\Delta\lambda$ を十分に小さく取って式(141)の近似を用いるほかはない。一本のスペクトル線全体の放射輝度 I_L を求める際に式(44)に関して述べた量 $\int \Phi_L d\lambda$ の有用性は光電子増倍管などの検出器の線型性を前提とした上でのことであって、これに対応した $\int \bar{T}_p(\lambda) d\lambda$ や $\int \bar{D}_p(\lambda) d\lambda$ は無意味であり、やはり上記の手続きは避けられない。

なおくりひろげについては Jansson の解説²⁶⁾がある。

6.3.6 スリット関数の測定用光源

前にも述べたようにスリット関数は光学系の収差にも依存するので、本節で示した種々の計算式は一つの目安にすぎず、正確なスリット関数を必要とする時には実測をしなければならない。この光源としてはスペクトル線幅の十分小さいものとして、一種類の同位体を用いた放電管があり、 Hg^{198} では546.1 nmで半値幅は約 6×10^{-4} nm²⁶⁾、 Cd^{114} では467.8 nmで約 6×10^{-4} nm²⁷⁾である。通常の水銀灯やカドミウム灯は多くの同位体を含んでいるため、水銀灯では約 4×10^{-3} nm、カドミウム灯²⁸⁾では約 1×10^{-3} nmである。レーザーはそのまゝでは干渉性照明の光源としては適当であるが、非干渉照明用の光源としては、散乱媒質を通過させるなどの処理により空間的干渉性を除く必要がある。

あとがき

四回にわたった講座をこれで終える。容易にまとめられるつもりで筆を執ったところが、つい道草を食ってしまった。時間をかけた割には実用性に乏しい内容になったが、分光測定入門諸氏の基礎的理解の一助ともなれば幸である。

参 考 文 献

- 24) M. Born and E. Wolf, 草川 徹, 横田英嗣 訳: 光学の原理Ⅲ (東海大学出版会, 1975) p.766.
- 25) P. A. Jansson: Deconvolution with Applications in Spectroscopy (Academic Press, 1984).
- 26) 田幸敏治: 応用物理 28 (1959) 527.
- 27) 田幸敏治: 応用物理 30 (1961) 471.
- 28) 田幸敏治: 応用物理 30 (1961) 436.

附録IV-1 式(6-91)の証明

$$t = a\mu, \quad f(t) \equiv \text{Si}(b+t) + \text{Si}(b-t)$$

とおくと積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(\mu) d\mu = \frac{1}{a\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt$$

となる。Si(t)が奇関数であることから

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{Si}(b+t) - \text{Si}(t-b) = \int_{t-b}^{t+b} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-t, 2b) \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U(t-x, 2b) \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

となり、これはf(t)がU(t, 2b)と(sin t)/tとのたゞみこみであることを示す。f(t)のフーリエ変換を

$$F(p) = \int f(t) \exp(jpt) dt, \quad (j \equiv 2\pi i)$$

と書くとパーセバル(Perseval)の定理により

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(p)|^2 dp$$

である。たゞみこみの定理によりF(p)はU(t, 2b)及び(sin t)/tのそれぞれのフーリエ変換u(p), g(p)の積で与えられるが、

$$u(p) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} U(t, 2b) \exp(jpt) dt = \frac{\sin 2\pi bp}{\pi p}$$

であり、その逆関係

$$U(t, 2b) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi bp}{\pi p} \exp(-jpt) dt$$

を変形して

$$g(p) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \exp(jpt) dt = \pi U\left(p, \frac{1}{\pi}\right)$$

が得られるので

$$F(p) = U\left(p, \frac{1}{\pi}\right) \frac{\sin 2\pi bp}{p}$$

となる。従って

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F(p)|^2 dp &= \int_{-\infty}^{\infty} U^2\left(p, \frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{\sin 2\pi bp}{p}\right)^2 dp \\ &= \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \left(\frac{\sin 2\pi bp}{p}\right)^2 dp = 4\pi b \int_0^b \left(\frac{\sin p}{p}\right)^2 dp \end{aligned}$$

に式(80)を入れて

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(\mu) d\mu = \frac{2\Delta\sigma_x}{\pi} \int_0^b \left(\frac{\sin p}{p}\right)^2 dp$$

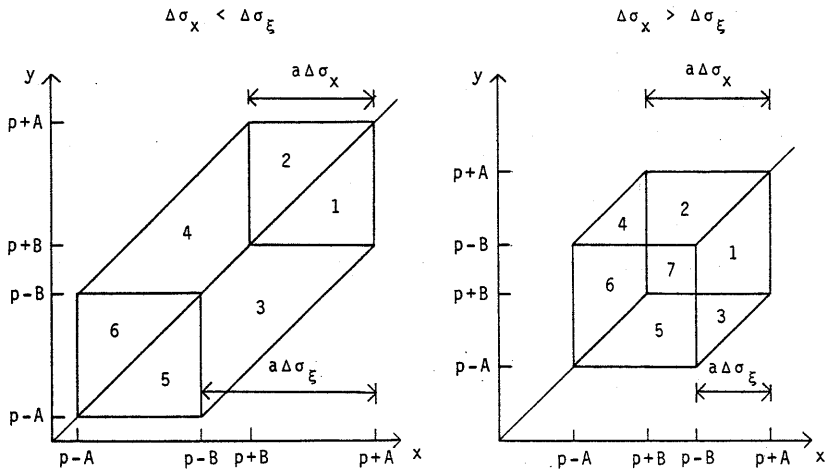
を得る。

附録IV-2 式(6-130)の導出

式(129)は

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y} U(\mu, \Delta\sigma_{\xi}) U(x-a(\sigma-\mu), 2b) U(y-a(\sigma-\mu), 2b) d\mu dx dy$$

と書きかえられる。μ-σ面上で三つのU関数の重なる領域を求め、μについて積分を行い、積分値をx-y面上で示すと図A V-1のようになる。この区分に従ってx, yについての積分を行い式(130)を得る。



図A V-1. x-y面での積分領域。μについての積分を行うと、 $\Delta\sigma_x$ と $\Delta\sigma_{\xi}$ との大小関係に、
 応じて、x-y面の図示の領域での被積分関数として下記の表式が得られる。

1: $(A+p-x)/a$, 2: $(A+p-y)/a$, 3: $(y-x+A-B)/a$, 4: $(x-y+A-B)/a$,
 5: $(A-p+y)/a$, 6: $(A-p+x)/a$, 7: $(A+B)/a$, ここで p, A, B は式(122)で与え
 られる。