

3. プラズマの分光測定入門 (II)

大塚 正 元

(名古屋大学プラズマ研究所)

(1985年3月15日受理)

Introduction to the Spectroscopic Measurement of Plasmas (II)

Masamoto OTSUKA

(Received March 15, 1985)

§4. 分光器の照明

光源からの光を分光器に導き入れる時に、分光器が取り込み得る分光放射束 Φ は式(4-1)によって

$$\Phi = S \int_{\Omega} dS I \cos \theta \quad (4-1)$$

で与えられる(図9)。ここで I は分光器の入口スリットを通過する光の分光放射輝度であって、振動数あるいは波長のほか、スリット開口面でのスリットの幅及び長さ方向の位置座標 x , y , スリット面に対する法線(光線方向の成分を正にとる)と光線とのなす角 θ , 並びに法線のまわりの方位角 φ の関数である。角についての積分($d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$)は分光器

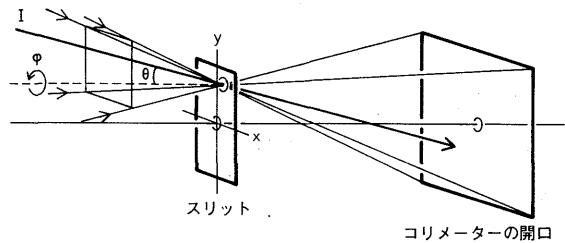


図9. 分光器に入る放射束.

に取り込み得る有効な立体角 Ω , 即ち分光器のコリメーター(collimator, 光を平行にするレンズあるいは鏡), 回折格子などの光学素子と, 入口スリットの前方におかれる集光レンズなどの光学素子の大きさによって制限される立体角の範囲にわたる。 Ω は x , y の関数である(モノクロメーター(monochromator)の場合は波長によって回折格子と光線とのなす角が変わるので設定波長の関数でもある)。 $dS = dx dy$

についての積分は入口スリットの面積にわたる。 I の値は、§2で述べたところからそれぞれ光線を逆方向にたどったところにある光源の分光放射輝度の値に、その光路上での全透過率をかけた値に等しい。与えられた光源に対して Φ を大きくする方法は(1)入口スリット上の各点から、分光器内の光学系でできる入射立体角一ぱいに光が入るよう適当な集光系をおき(ただしこの立体角より極端に大きく光を入れることは迷光をふやすばかりで益はない)、(2)波長の分解に必要な程度にスリット幅を広くとり、又スリットの長さを大きくとることである。

以下ではいくつかの集光法について述べる。

4.1 集光系を必要としない場合.

スリット上の各点から光源を見込む立体角が分光器内を見込む立体角より十分大きく、且つ光源の特定部分からの光を選び出す必要のない時には図10に示すように集光系を用いる必要はない。特に I が光源面上の位置にも光線の方向にも依らない時には式(1)からわかるように Φ は光源面の形にも、光源面からスリットまでの距離にも依らない。

4.2 スリット結像法.

光源が4.1での条件を満たす程には大きくない時や、光源の特定の部分からの光を選び出したい時には集光系を用いる。図11にはレンズを用いた最も簡単な場合を示す。ここではレンズLによって光源の像を入口スリット上に結ぶ。光源からの光を最大限にとり込むためには、スリットからレンズを見込む立体角が分光器内を見込む立体角より大きく、且つ光源の像がスリットの開口面より大きくなるようにレンズの直

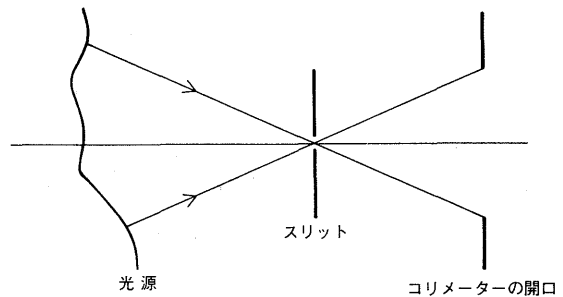


図10. 集光系なしのスリットの照明.

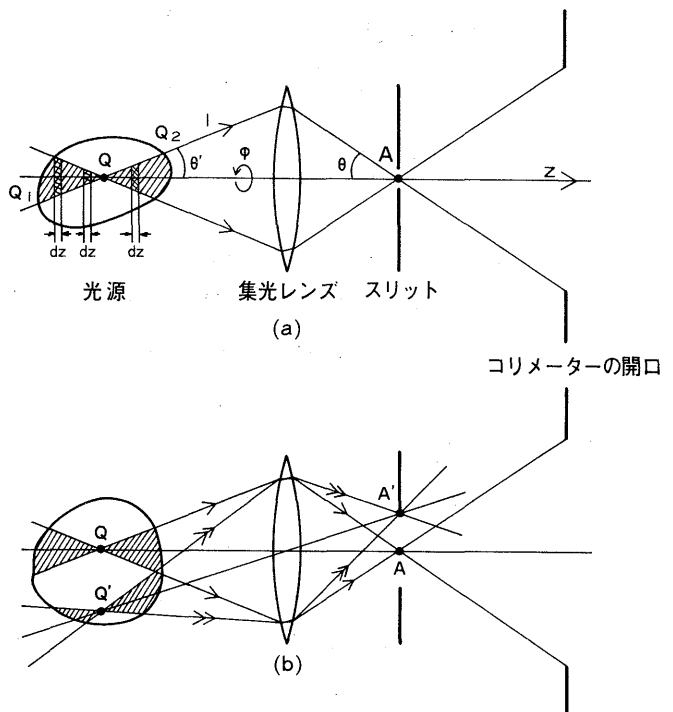


図11. スリット結像法. (a): スリットの幅方向, (b): スリットの長さ方向.

径及び焦点距離を選ばよい。

図11に示すように、光源の点Qの像をスリットの中心Aに結び、レンズLの光軸を分光器の主軸に一致させる。こゝで分光器の主軸とは入口スリット、コリメーター、回折格子、出口にスリットなどの光学素子の中心を通る光路である。レンズの光軸を分光器の主軸に一致させる方法としては(i) Ne-Heレーザー光を出口スリットから入射して入口スリットから取り出し、この光線を基準にしてレンズを配置するか、(ii) 高圧水銀灯のような十分輝度の高い光源の像を出口スリット上に、分光器内を見込む立体角よりも大きな立体角で結び入口スリットから出て来る(回折格子の形で制限される)矩形の断面をもった光束の中心にレンズを置く。(i)の場合にはレーザー光の向きを調節して光が分光器内の回折格子や結像鏡の中心を通っていることを確認する必要がある。両スリットの中心を光が通ってもこの光路が主軸に一致しているとは限らないからである。光学台が附属されている既製品の分光器でも、このような調整が完全になされているとは限らない。

光軸をz軸とし、図示のように光線とz軸とのなす角を θ 、 θ' 、軸のまわりの方位角を φ 、レンズの透過率をTとする。式(1)によれば、 Φ はスリットの各点での放射照度をスリットの開口面にわたって積分したものであるから放射照度の代表的な値としてスリット中心での値 E_A を評価する。これは

$$E_A = \int T I_Q \cos \theta \, d\Omega \quad (4-2)$$

で与えられる。こゝで I_Q は光源での放射輝度である。レンズの倍率(像の大きさ/物体の大きさ)をMとすると、後述の正弦条件

$$M \sin \theta = \sin \theta' \quad (4-3)$$

が満たされている時には、これとこれを微分した式とから

$$\cos \theta \, d\Omega = \frac{1}{M^2} \cos \theta' \, d\Omega' \quad (4-4)$$

の関係が得られるので

$$E_A = \frac{1}{M^2} \int T I_Q \cos \theta' \, d\Omega' \quad (4-5)$$

となる。図11に示すように光源がプラズマのように輿行をもっていて光学的にうすい場合には I_Q は放射輝度 ϵ を用いて式(2-32)により

$$I_Q = \int_{Q_1}^{Q_2} \epsilon \, dl \quad (4-6)$$

で与えられる。こゝで l は光路に沿った長さである。Tは θ' にあまり依らないので

$$z = l \cos \theta' \quad (4-7)$$

の関係から

$$E_A = \frac{T}{M^2} \int \epsilon \, dz \, d\Omega' \quad (4-8)$$

となる. ϵ が一様の際は, 式(8)は厚さ dz の板状の部分が同じ重みで E_A に寄与していることを示す. 即ち ϵ が Q の近傍でだけ特に大きい値をもっているものでなければ, Q が A に結像されているからといって, Q の近傍での ϵ だけが E_A に寄与しているとは言えない.

スリットの長さが分光器の開口の大きさに比べて比較的大きく, 入射光束の張る立体角が大きい時には, スリットの両端部に入った光の一部は分光器内の分光素子に到達できなくなることがある. このため分光写真撮影においてはスペクトル線の両端部の写真濃度(写真陰画では感光部分の透過率の逆数の常用対数值)が小さくなる(vignetting, 口径蝕). これを避けるには図12のように, 入口スリットの直前に更にレンズ L_1 をおいてレンズ L の像をコリメータに結ぶようにすればよい. L_1 は anti-vignetting lens あるいは field lens と呼ばれる.

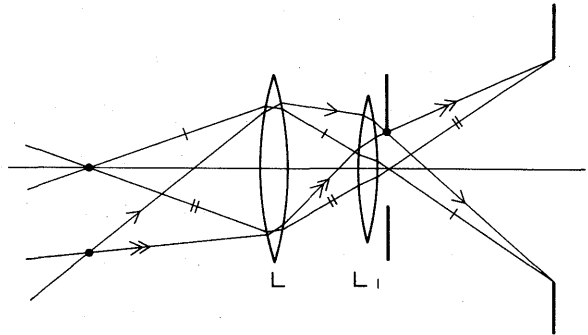


図12. 口径蝕を除く方法.

4.2.1. 正弦条件

図13に示すように Q の近傍の光軸に垂直な微小面積 dS' をもった光源が透過率 T のレンズ L によって A の近傍に結像され, 像の面積が dS であるとする. 簡単のため媒質の屈折率は1とする. 光軸と(無限小ではない)角 θ' , θ をなすすべての光線に関して収差なく結像されているとすれば, Q を出た各光線のまわりの微小立体角に含まれる放射束 $I_Q dS' \cos \theta' d\Omega'$ はレンズで一部反射され, L を通ったあと $T(I_Q dS' \cos \theta' d\Omega')$ になって, A での対応する微小立体角に含まれる放射束 $(TI_Q) dS \cos \theta d\Omega$ となり, 像点に集まるはずである. 即ち

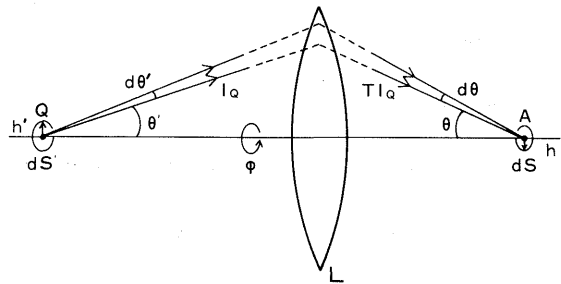


図13. 正弦条件.

$$T(I_Q dS' \cos \theta' d\Omega') = (TI_Q) dS \cos \theta d\Omega \tag{4-9}$$

でなければならない. 角についての積分をすれば

$$dS' \sin^2 \theta' = dS \sin^2 \theta \tag{4-10}$$

となり, 物体と像との対応する長さ h' , h と倍率 $M = h/h'$ の関係から

$$h' \sin \theta' = h \sin \theta \quad (4-11)$$

あるいは式(3)を得る。これはAbbeの正弦条件と呼ばれ軸上にある微小の大きさの光源が有限の θ' に対しても収差なく結像されるための条件である。

光源が無遠にある時には図14において、レンズの焦点距離を f 、光源とレンズ(の主要面)からの距離を l 、入射光と光軸との距離を y として、 $l \rightarrow \infty$ の際の関係

$$\frac{h'}{h} \rightarrow \frac{l}{f}$$

$$\sin \theta' \rightarrow \frac{y}{l}$$

を式(11)に入れて

$$\frac{h'}{h} \sin \theta' \rightarrow \frac{l}{f} \cdot \frac{y}{l} = \frac{y}{f} = \sin \theta$$

即ち

$$y = f \sin \theta \quad (4-12)$$

を得る。式(12)から $y \leq f$ 、即ち正弦条件を満すレンズのFナンバー(レンズの焦点距離/レンズの直径)は0.5より小さくはなり得ないことがわかる。

4.3 中間結像法.

スリット結像法ではスリット上の像の放射輝度は光源の放射輝度の位置的变化を反映しているので、一般には一様でない。非点収差のない(stigmatic)分光器を用いる際には、これから光源の輝度の空間分布についての情報を得ることができるが、一方、写真測定で、空間的には平均化された輝度を精度よく測る場合には欠点とされている。スペクトル線写真とは、入口スリットの各波長別の写真であって、被写体の形が整っていること即ち、スリットの刃が平行で、きずやほこりの附着がないことのほかに、スリット全体が一様に照明されることによってスペクトル線の長さにならって一様な写真濃度が得られることが望ましいからである。このためには入口スリットのどの部分も光源のすべての部分からの光で照らされるように光学系を配置する。

図15に示すものは中間結像法と呼ばれる。この方法では光源の像をスリット直前におかれたレンズによってコリメーターに結像する。図15(b)(スリットの長さ方向の断面図)によれば、スリットの中心 A_0 、端 A_1 を通過してコリメーターに入る光はいずれも光源の全長から来ていることがわかる。しかし図15(a)

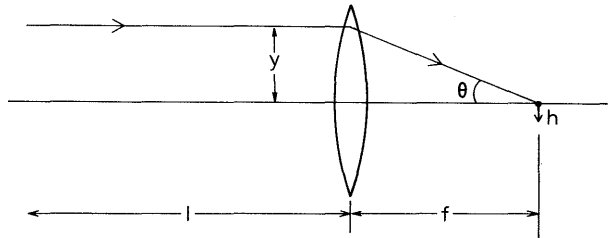


図14. 光源が無遠にある時の正弦条件.

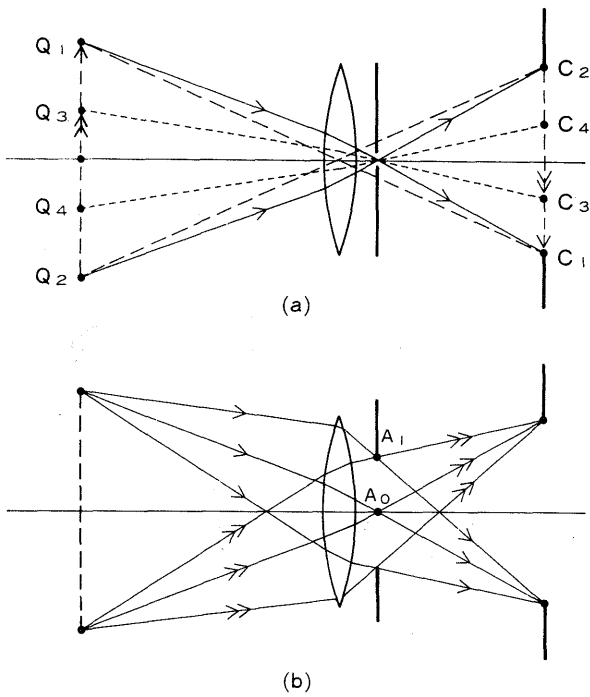


図15. 中間結像法. (a) : スリットの幅方向, (b) : スリットの長さ方向.

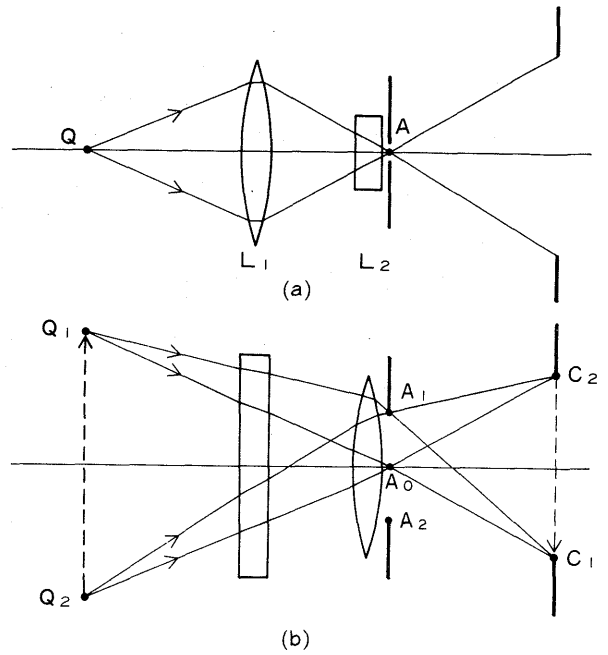


図16. 二つの円筒レンズによる集光法. (a) : スリットの幅方向, (b) : スリットの長さ方向.

(スリットの幅方向の断面図)では光源の大きさが Q_1Q_2 程度なければコリメーターの開口 C_1C_2 を満たすことはできないことを示す (光源が Q_3Q_4 の大きさではコリメーターは C_3C_4 が満たされるだけである). 従ってスリットの幅方向に光源が小さい時には分光器の開口の立体角が十分利用できない.

4.4. 円筒レンズ法

この欠点を除く方法として二つの円筒レンズを用いる方法がある. 図16に示すように円筒レンズ L_1, L_2 の母線を互いに直交させて置き, L_1 によってスリット面上にスリット幅方向の結像を, L_2 によってコリメーター上にスリット長さ方向の結像を行う. 図からわかるようにスリット上の各点 A_0, A_1, A_2 には光源の長さ Q_1Q_2 にわたる各点からの光が十分な開き角をもって入射し, かつコリメーターに入るのので, スリット幅方向に小さい光源に対しても立体角に関する損失がない.

§5. 点光源による放射照度

与えられた点Aでの放射照度 E_A は, その点を通る各光線を逆にたどったところにある光源での放射輝度 I_0 を用いて

$$E_A = \int T I_0 \cos \theta d\Omega \tag{4-13}$$

で与えられることは既に述べた。TはQからAまでの光路の透過率、 θ はAでの受光面に対する法線と光線とのなす角である。 I_0 が有限の値をもっている場合には式(13)の積分は問題はないが、点光源の場合には放射輝度についての考察が必要である。幾何光学についての多くの成書(例えば refs, 19, 20)で論じられている収差は点光源からの光線の追跡が基本となっているにもかかわらず“幾何光学では光線は光の進行方向を代表しているのみであるからこれから像の強度分布を求めることはできない”²¹⁾*とされているようである。しかしながら以下では点光源の場合に式(13)から解析的に放射照度が求められることをいくつかの例で示す。

5.1 点光源の放射強度

点光源とは有限の大きさの光源の体積が0になると共に、放射係数が無限大になってその放射強度がある有限値に収斂したものと考えられる。図17に示すように、簡単のため、この光源の位置を原点とし、問題とする光線方向にz軸を、これに垂直に、且つ互いに直交するx、

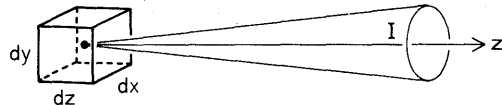


図17. 点光源の放射輝度。

y軸をとり、原点の近傍の微小体積 $dV = dx dy dz$ の中でだけ放射係数 ϵ は0でないとする、z方向の放射輝度は

$$I = \int_0^{dz} \epsilon dz \quad (4-14)$$

で与えられる。上記の極限操作によって生じる点光源の放射強度をJとすると

$$\lim_{\substack{dV \rightarrow 0 \\ \epsilon \rightarrow \infty}} \epsilon dV = J \quad (4-15)$$

となるが、これは

$$\epsilon = J \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (4-16)$$

と同義である。こゝで $\delta(x)$ などはデルタ関数である。これを式(14)に入れて

$$I = J \delta(x) \delta(y) \quad (4-17)$$

を得る。x、y軸の代りにz軸に直交する斜交軸 ξ 、 η 軸を用いるとデルタ関数の性質から(附録1を見よ)

$$I = J \frac{\delta(\xi) \delta(\eta)}{\sin \alpha} \quad (4-18)$$

となる。こゝで α は ξ 、 η 軸のなす角である。式(17)、(18)は点光源のz方向の放射輝度を与える。

Jが方向によって異なる値をとる時にはIはJと同じ方向依存性をもつ。

* こゝでは強度とは放射照度を意味していると考えられる

5.2 照度計算の概要

点光源Qからの一本の光線が光学系を通過して観測点Aに至るとする。図18に示すように、Qを通り光路Q→Aに垂直な平面(ξ-η面)を定め、Qを原点として座標軸ξ, η軸をとり両軸の交角をxとすると、この光線によるAでの放射照度E_Aは式(13), (18)により

$$E_A = \int T J \frac{\delta(\xi) \delta(\eta)}{\sin x} d\Omega \cos \theta \quad (4-19)$$

で与えられる。Aから光路Q→Aを逆にたどって任意の距離l'の点Bを通り、光路Q→Aに垂直な平面(ξ'-η'面)を定め、Bを原点として座標軸ξ', η'をとりその交角をγとする。AからQの方に向かって光路Q→Aとは少し異なる方向に光を送るならば、この光線は大抵の場合はQの近傍の点を通る。この点をQ'とする。特別

な場合にはQを通ることもあるが、この場合についてはあとで触れる。即ちもしQ'に光源があればこの光はAを通ることになる。Q'のξ-η面で座標をξ, η, 光路Q'→Aとξ'-η'面との交点B'の座標をξ', η'とすると、AからB'の近傍を見込む立体角dΩは

$$d\Omega = \frac{l' \sin \gamma d\xi' d\eta'}{(\xi'^2 + \eta'^2 + 2\xi'\eta' \cos \gamma + l'^2)^{3/2}} \quad (4-20)$$

で与えられる(附録2を見よ)。(ξ', η')と(ξ, η)との関係は光学系に対して解析的に求められるから、そこから得られる

$$d\xi d\eta = \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi', \eta')} \right| d\xi' d\eta' \quad (4-21)$$

の関係を用いると、ξ=η=0ではξ'=η'=0であることを注意して式(19)は

$$E_A = T J_A \frac{\cos \theta_A \sin \gamma}{l'^2 \sin x} \left/ \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi', \eta')} \right|_{\xi'=0, \eta'=0} \right. \quad (4-22)$$

となる*。ここでJ_Aは点光源の光路Q→A方向の放射強度、θ_Aは受光面に対する法線とAでの光線とのなす角である。

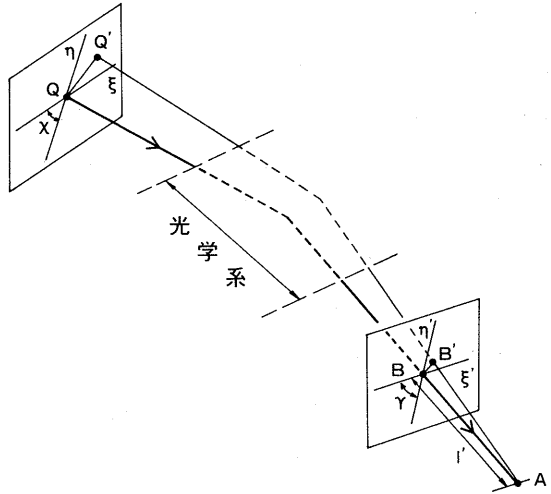


図18. 点光源の場合の照度の計算。

* l'は任意に定めた量であるが、本質的にはξ', η'と共に光路Q'→Aの方向角をきめているので、式(22)の計算結果からは消える。

光路 $Q \rightarrow A$ を固定し、この光路の A を通る直線部分を光の進行方向及び逆方向に延長した一直線上の各点で、上記の手続きに従って Q' の座標値 ξ, η を対応する ξ', η' のべき級数で表わすと、或る点では ξ' と η' との特定の比の値に対して ξ', η' の一次の項が消える；即ち二次以上の高次の項を無視すると Q' は Q に一致する。この点を火点 (caustic point) と呼ぶ*。火点はこの直線上で一般に 2 個存在し、両火点に関して ξ', η' の特定の比の値に対応する光路と基準の光路 $Q \rightarrow A$ とを含む面は、光源側においても観測点側においても、互に直交する。火点が光の進行方向と逆の方向の延長線上にある時は虚の火点である。両火点の位置が一致する時は“ガウス領域”(光学系の主軸近傍の光線を取り扱う幾何光学の領域)の意味での像点である。 ξ', η' のすべての次数について Q' が Q に一致する時はこの点は完全に無収差の像点である。

A が火点の場合には式(22)の分母の関数行列式は 0 となるので E_A は無限大となるが、 A の近傍の点に対して上記の手続きを行えば、 E_A の火点からの距離の依存性を知ることができる。

5.3 逆二乗及び余弦の法則

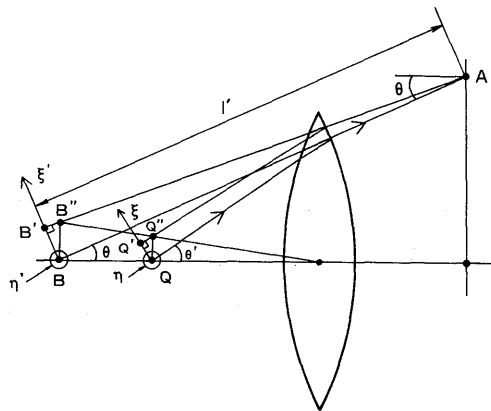
放射強度 J の点光源から l の距離にある点 A で法線が光線と θ の角をなすように受光面が置かれている場合には $\xi - \eta$ 面と $\xi' - \eta'$ 面とを同一にとると式(22)からたゞちに ($T=1$ として)

$$E_A = \frac{J \cos \theta}{l^2} \tag{4-23}$$

が得られる。これはよく知られた照度に関する逆二乗ならびに余弦の法則である。

5.4 レンズの軸外での照度

図19に示すように、レンズの光軸上の点光源 Q の虚像が B にある時、軸外の点 A で軸に垂直な面上の照度を求める。 $AB = l'$ とし、 Q 及び B において ξ, ξ' 軸を紙面内に、 η, η' 軸を紙面に垂直にとる。図から明らかな関係



$$\left. \begin{aligned} \xi' &= BB' = BB'' \cos \theta \\ \xi &= QQ' = QQ'' \cos \theta \end{aligned} \right\} \tag{4-24}$$

図19. レンズの軸外の点の照度. η, η' 軸は Q, B において紙面に垂直である。

と、正弦条件(式(3))

$$\frac{BB''}{QQ''} = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = M \tag{4-25}$$

とから

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi', \eta')} = \frac{1}{M^2} \frac{\cos \theta'}{\cos \theta} \tag{4-26}$$

* ref. 19, p. 175 ではこれを焦点 (focus) と呼んでいるが、通常の意味での焦点、即ち主軸に平行な光線の集まる点、との混同を避けて上記のように名づけた。

となるので式(22)から

$$E_A = T J M^2 \frac{\cos^2 \theta}{l'^2 \cos \theta'} = T J \left(\frac{M}{l'} \right)^2 \frac{\cos^2 \theta}{(1 - M^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (4-27)$$

を得る。

光源が焦点にある時にはレンズの右側には平行光線が通り虚像は無限遠に移るので、図20のように ξ' , η' 座標軸をとると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi'}{l'} &= \frac{QQ'}{f} = \frac{\xi}{f \cos \theta'} \\ \frac{\eta'}{l'} &= \frac{\eta}{f} \end{aligned} \right\} (4-28)$$

と正弦条件

$$y = f \sin \theta' \quad (4-29)$$

とを用いて

$$E_A = T J \frac{1}{f (f^2 - y^2)^{1/2}} \quad (4-30)$$

を得る。Jが

$$J = J_0 \cos \theta' \quad (4-31)$$

の方向依存性をもっている時には

$$E_A = T J_0 \frac{1}{f^2} \quad (4-32)$$

となり、Tのy依存性を無視すれば、平行光線による放射照度は光束の断面にわたって一様である。式(31)は軸に垂直で放射輝度が一様、且つ等方的な微小面光源の放射光度と同じであるから、正弦条件の式(29)は、一様且つ等方の放射輝度をもった微小面光源を焦点で軸に垂直に置いた時にレンズ通過後に断面にわたって一様な放射発散度をもった平行光束を得るための条件といえることができる。式(27)、(30)が示すように正弦条件を満たすレンズにより照射される領域はこれらの式の分母が実数である範囲に限られる。

5.4.1 平行光線の輝度

図20において光路Q→Aのうちのレンズの左側は点光源からの発散光線であり、右側は平行光線であるが、§2.で述べたところに従えば右側の部分の放射輝度は左側の部分の輝度を用いて $TJ\delta(\xi)\delta(\eta)$ と表わすことができる。実際この表式が平行光線の放射輝度を表わしていることは次のようにしてわかる。

式(28)の ξ'/l' 及び η'/l' の代りに二つの角

$$\theta_x \equiv \frac{\xi'}{l'}, \quad \theta_y \equiv \frac{\eta'}{l'} \quad (4-33)$$

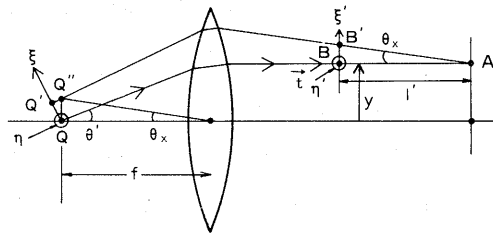


図20. 発散光線と平行光線。 η, η' 軸はQ, Bにおいて紙面に垂直であり、 θ_y は η 軸上の点Aから見た際のABからの仰角である。

を導入すると式(28)により

$$\begin{aligned} T J \delta(\xi) \delta(\eta) &= T J \delta(\theta_x f \cos \theta') \delta(\theta_y f) \\ &= \frac{T J}{f^2 \cos \theta'} \delta(\theta_x) \delta(\theta_y) \end{aligned} \quad (4-34)$$

となる。附録3に示すように $\delta(\theta_x) \delta(\theta_y)$ は主軸に平行な方向 \vec{t} 以外では 0 になるデルタ関数 $\delta^2(\vec{t})$ であるから、式(34)の右辺は放射発散度 K が

$$K = \frac{T J}{f^2 \cos \theta'} = \frac{T J}{f (f^2 - y^2)^{1/2}} \quad (4-35)$$

で与えられる平行光線の放射輝度を表わしていることになる。

5.5 鏡による反射

鏡はそれによる結像において色収差が問題にならないので広い波長域に対する光学素子として有用であり、特にレンズを用いられない短波長域では欠くことのできないものである。ここでは鏡による像について計算結果だけをまとめておく。

図21に示すように、点光源 Q からの光が鏡面上の点 O で反射し観測点 A を通るとする。 O における鏡面に対する法線 \vec{n} の向きを Q と反対側にとる。 O を原点として直角座標軸をとる； z 軸は法線とは反対向きに、 x, y 軸は主平面（最大及び最小の曲率半径をもつ面）内にとる。

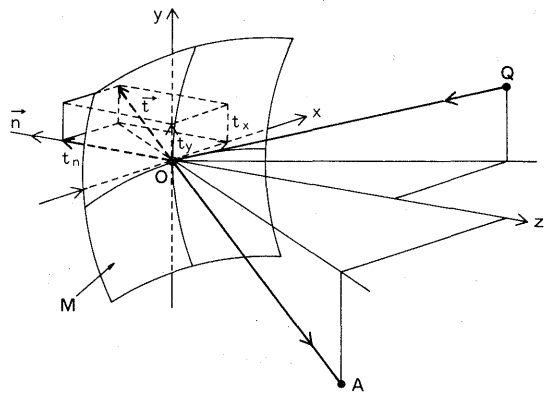


図21. 鏡による反射。M：鏡，Q：点光源，A：観測点， \vec{n} ：Oにおける鏡面に対する法線方向の単位ベクトル。

与えられた Q に対し OA （その両方向への延長線を含む）上にある二つの火点の O からの距離

ρ_+, ρ_- は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{\pm}} + \frac{1}{\rho_Q} &= \frac{1}{t_n} \left[\frac{1}{R_x} (1 - t_y^2) + \frac{1}{R_y} (1 - t_x^2) \pm \sqrt{\psi} \right], \\ \psi &= \left(\frac{1 - t_y^2}{R_x} \right)^2 + \left(\frac{1 - t_x^2}{R_y} \right)^2 + 2 \frac{t_x^2 t_y^2 - t_n^2}{R_x R_y} \end{aligned} \quad (4-36)$$

で与えられる。 ρ_{\pm} の添字の複号は右辺の複号に対応し、 ρ_{\pm} が正の時には \vec{OA} の方向の位置にある実の火点、負の時にはその逆方向の位置にある虚の火点を表わす。 R_x, R_y は $x-z$ 面及び $y-z$ 面内の曲率半径で、正の時には曲率中心は $+z$ 側に、負の時 $-z$ 側にある。 t_x, t_y, t_n は \vec{AO} 方向の単位ベクトル

\vec{t} がx軸, y軸, 法線(-z軸)となす角の余弦である.

点Aで受光面に対する法線が光線と θ_A の角をなす時, 放射照度 E_A は式(22)から

$$E_A = R_f \frac{J \cos \theta_A}{\rho_Q^2} \left| \frac{\rho_+ \rho_-}{(\rho_A - \rho_+) (\rho_A - \rho_-)} \right| \quad (4-37)$$

で与えられることがわかる. ここで R_f は光線 \overline{QO} に対する鏡の反射率である.

5.5.1 平面鏡

$1/R_x, 1/R_y$ は共に0であるから, 式(36)から

$$\rho_{\pm} = -\rho_Q \quad (4-38)$$

となる. 即ち焦点は虚像点である. 式(37)から得られる放射照度

$$E_A = R_f \frac{J \cos \theta_A}{(\rho_A + \rho_Q)^2} \quad (4-39)$$

は式(23)からも予期される通りである.

5.5.2 球面鏡

球の半径をRとすると $R_x = R_y = R$ である. 一般性を失うことなく入射面をx-z面にとる. 入射角を θ とすると

$$t_y = 0, \quad t_n = \sqrt{1 - t_x^2} = \cos \theta \quad (4-40)$$

である. ρ_+, ρ_- をそれぞれ $\rho_{\parallel}, \rho_{\perp}$ と書きかえて式(36)から

$$\frac{1}{\rho_{\parallel}} + \frac{1}{\rho_Q} = \frac{2}{R \cos \theta} \quad (4-41)$$

$$\frac{1}{\rho_{\perp}} + \frac{1}{\rho_Q} = \frac{2 \cos \theta}{R} \quad (4-42)$$

が得られる. \parallel は入射面内にある光束, 即ち原点の近傍の無限小 $x \neq 0, y = 0$ の座標値をもった鏡面上の点で反射された光線と光線 $Q \rightarrow O \rightarrow A$ との交わりとしてつくられる焦点を意味し, \perp は入射面に垂直な光束, 即ち $x = 0$, 無限小 $y \neq 0$, の光線による焦点を意味する. 図22で K_{\parallel} は $OK_{\parallel} = \rho_{\parallel}$ の焦点を, K_{\perp} は $OK_{\perp} = \rho_{\perp}$ の焦点を示す. K_{\perp} はQ及び円の中心Cと同一直線上にあり, K_{\parallel} はQ及びQOがローランド(Rowland)円(曲率半径COを直径とす

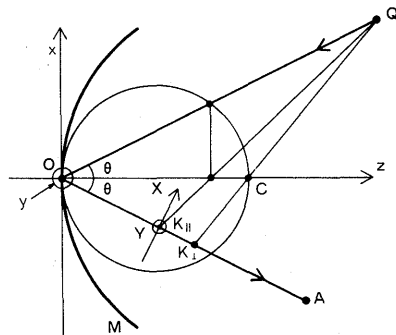


図22. 球面鏡による反射. M: 球面鏡, C: 球の中心, Q: 点光源, A: 観測点, K_{\parallel} : x-z 面内の光束に対する焦点, K_{\perp} : y-z 面内の光束に対する焦点. y 及び Y 軸は O, K_{\parallel} において紙面に垂直である.

る円)と交わる点から z 軸に下した垂線の足と同一直線上にある。火点が虚の場合にも同様な幾何学的関係がある。

式(41), (42)からわかるように $\cos \theta = 1$ 即ち Q , A が z 軸上にある時に限り, 両火点は一致して Q の像点となり, 両式はよく知られた球面鏡の結像公式となる。

K_{\parallel} を原点とし $x-z$ 面で OK_{\parallel} に垂直に X 軸を, y 軸に平行に Y 軸をとる。 K_{\parallel} が実の火点である時 K_{\parallel} での非点収差, 即ち Y 方向への伸び ΔY_{As} は鏡面上の光束の y 方向の幅 Δy に対して

$$\Delta Y_{As} = \frac{\rho_{\perp} - \rho_{\parallel}}{\rho_{\perp}} \Delta y = \frac{2 \rho_Q \sin^2 \theta}{2 \rho_Q - R \cos \theta} \Delta y \quad (4-43)$$

で与えられる。この像は $\pm Y$ 方向には X 軸を主軸とした放物線型にわずかに彎曲している。

放射照度は式(37)で与えられるが, A が火点に一致する時には無限大となる。 A が K_{\parallel} にあり, $\theta_A = 0$ の時には K_{\parallel} の近傍での放射照度 $E_{K_{\parallel}}$ (X, Y) は次のようになる。

(i) $\rho_Q \neq R \cos \theta$ の時:

$$E_{K_{\parallel}}(X, Y) = R_f J \frac{(2 \rho_Q - R \cos \theta)^{3/2} \cos \theta}{2\sqrt{3} \rho_Q^3 |\rho_Q - R \cos \theta|^{1/2} (\sin \theta)^{5/2}} \left[\frac{\pm R}{X - CY^2} \right]^{1/2},$$

$$C = \frac{(2 \rho_Q - R \cos \theta)(R \cos \theta - \rho_Q \cos 2\theta)}{4 R \rho_Q^2 \sin^3 \theta}, \quad (4-44)$$

ここで複号は $R \cos \theta \geq \rho_Q$ に応じて \pm ととる。例えば \pm の時には (高次の項を無視すれば) $X - CY^2$ が負の部分に対しては放射照度は 0 であり, 像は非対称である。

(ii) $\rho_Q = R \cos \theta$ の時は, $\rho_{\parallel} = R \cos \theta$ であり, Q, K_{\parallel} 共にローランド円上にある。光の鏡面への入射点の座標を x, y とすると

$$X = \frac{\sin^2 \theta}{R^2 \cos \theta} \left[x^3 + R y^2 \sin 2\theta + x y^2 (3 - 2 \cos^2 \theta) \right]$$

$$Y = 2 y \sin^2 \theta \left(1 + \frac{x}{R \cos \theta} \right) \quad (4-45)$$

に対して

$$E_{K_{\parallel}}(X, Y) = R_f J \frac{1}{2 \sin^4 \theta |3x^2 + y^2 \cos 2\theta|} \quad (4-46)$$

である。 X, Y のそれぞれの括弧内の最後の項を無視すると

$$E_{K_{\parallel}}(X, Y) = R_f J \frac{1}{6 R^{4/3} (\cos \theta)^{2/3} |(X - C_1 Y^2)^{2/3} + C_2 Y^2|}$$

$$C_1 = \frac{1}{2 R \sin \theta}, \quad C_2 = \frac{\cos 2\theta}{12 R^{4/3} (\sin \theta)^{8/3}} \quad (4-47)$$

となる。放射照度は X の正負にわたって 0 ではなく, $X - C_1 Y^2$ にもとづくわずかな彎曲を無視すると Y 軸に関して対称である。

Qがz軸上にある時は K_{\parallel} 、 K_{\perp} は共にz軸にあって一致する。これをKとする。放射照度はz軸のまわりに軸対称であり、Kのz軸からの距離をrとすると放射照度 $E_K(r)$ は

$$E_K(r) = R_f J \frac{(2\rho_0 - R)^{2/3}}{3|\rho_0 - R|^{4/3}} \left(\frac{R}{r}\right)^{4/3} \quad (4-48)$$

となる。

参 考 文 献

- 19) M. Born and E. Wolf 著, 草川 徹, 横田 英嗣 訳: 光学の原理 I (東海大学出版会, 1974).
- 20) 久保田 広: 応用光学 (岩波書店, 1967).
- 21) ref. 20, p. 55.

附 録 1.

直交座標軸 x, y , 斜交軸 ξ, η 並びに関係する角を図A1に示すようにとると点Pの座標 (x, y) は座標 (ξ, η) を用いて

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha + \eta \cos (\alpha + \chi) \\ y &= \xi \sin \alpha + \eta \sin (\alpha + \chi) \end{aligned} \right\} \quad (A.1-1)$$

と表わされる。 $\delta(x)$ は $\xi = -\eta \frac{\cos(\alpha + \chi)}{\cos \alpha}$ だけで0でないから $\delta(y)$ は

$$\begin{aligned} \delta(y) &= \delta\left(-\eta \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos(\alpha + \chi) + \eta \sin(\alpha + \chi)\right) \\ &= \delta\left(\eta \frac{\sin \chi}{\cos \alpha}\right) = \frac{\cos \alpha}{\sin \chi} \delta(\eta) \end{aligned}$$

となる。従って $\delta(x)$ にもどって

$$\delta(x) = \delta(\xi \cos \alpha) = \frac{1}{\cos \alpha} \delta(\xi)$$

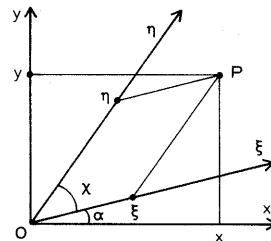


図 A. 1. 直交軸と斜交軸.

となり

$$\delta(x) \delta(y) = \frac{1}{\sin x} \delta(\xi) \delta(\eta) \quad (\text{A.1-2})$$

が得られる。

附録 2.

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (\text{A.2-1})$$

より

$$x = z \tan \theta \cos \varphi, \quad y = z \tan \theta \sin \varphi \quad (\text{A.2-2})$$

となるがこれを z を一定にした時の (θ, φ) と (x, y) との変換関係と見て

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = z^2 \sec^2 \theta \tan \theta \quad (\text{A.2-3})$$

を得る。従って

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi = \sin \theta dx dy / \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy \quad (\text{A.2-4})$$

となる。斜交軸(附録 1 を見よ)

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha + \eta \cos(\alpha + \chi) \\ y &= \xi \sin \alpha + \eta \sin(\alpha + \chi) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2-5})$$

を導入すると

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \sin x \quad (\text{A.2-6})$$

$$x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta \cos \chi \quad (\text{A.2-7})$$

となるから

$$d\Omega = \frac{z \sin x d\xi d\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta \cos \chi + z^2)^{3/2}} \quad (\text{A.2-8})$$

が得られる。 z, x, ξ, η をそれぞれ l', r, ξ', η' と置きかえれば式(4-20)となる。

附録 3.

極座標

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (\text{A.3-1})$$

の θ, φ の代りに、点 (x, y, z) と y 軸を含む面が $y-z$ 面となす角 θ_x 及びこの点と x 軸を含む面が $x-z$ 面となす角 θ_y を導入すると、

$$\tan \theta_x = \frac{x}{z}, \quad \tan \theta_y = \frac{y}{z} \quad (\text{A.3-2})$$

となるから

$$\tan \theta_x = \tan \theta \cos \varphi, \quad \tan \theta_y = \tan \theta \sin \varphi \quad (\text{A.3-3})$$

の関係から

$$\frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(\theta_x, \theta_y)} = \frac{\sec^2 \theta_x \sec^2 \theta_y \cos^3 \theta}{\sin \theta} \quad (\text{A.3-4})$$

を得る。従って

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{\sec^2 \theta_x \sec^2 \theta_y}{(1 + \tan^2 \theta_x + \tan^2 \theta_y)^{3/2}} d\theta_x \, d\theta_y \quad (\text{A.3-5})$$

となる。ベクトル \vec{t} の方向 θ_{x0}, θ_{y0} 以外では 0 となる 2 次元のデルタ関数を $\delta^{(2)}(\vec{t})$ と書くと θ_x, θ_y の任意の関数 $F(\theta_x, \theta_y)$ に対して

$$\begin{aligned} F(\theta_{x0}, \theta_{y0}) &= \int F(\theta_x, \theta_y) \delta^{(2)}(\vec{t}) \, d\Omega \\ &= \int F(\theta_x, \theta_y) \delta^{(2)}(\vec{t}) \frac{\sec^2 \theta_x \sec^2 \theta_y}{(1 + \tan^2 \theta_x + \tan^2 \theta_y)^{3/2}} d\theta_x \, d\theta_y \\ &= \int F(\theta_x, \theta_y) \delta^{(2)}(\vec{t}) \frac{\sec^2 \theta_{x0} \sec^2 \theta_{y0}}{(1 + \tan^2 \theta_{x0} + \tan^2 \theta_{y0})^{3/2}} d\theta_x \, d\theta_y \end{aligned} \quad (\text{A.3-6})$$

であり、又一方

$$F(\theta_{x0}, \theta_{y0}) = \int F(\theta_x, \theta_y) \delta(\theta_x - \theta_{x0}) \delta(\theta_y - \theta_{y0}) \, d\theta_x \, d\theta_y \quad (\text{A.3-7})$$

とも書けるから

$$\delta^{(2)}(\vec{t}) = \cos^2 \theta_{x0} \cos^2 \theta_{y0} (1 + \tan^2 \theta_{x0} + \tan^2 \theta_{y0})^{3/2} \delta(\theta_x - \theta_{x0}) \delta(\theta_y - \theta_{y0}) \quad (\text{A.3-8})$$

と表わされる。従って

$$\theta_{x0} = 0, \quad \theta_{y0} = 0 \quad (\text{A.3-9})$$

に対しては

$$\delta^{(2)}(\vec{t}) = \delta(\theta_x) \delta(\theta_y) \quad (\text{A.3-10})$$

となる。

附録 4.

本構座の(1)〔第52巻, 第3号, 1984, p. 255〕のうち p. 256 上から5行目のはじめに θ を入れ、

同	下から2行目	$I(\lambda)$	を	$I_\lambda(\lambda)$	に,
同	式(1-7)右辺	$I(\lambda)$	を	$I_\lambda(\lambda)$	に,
p. 257	表1右欄3行目	l_m	を	l_m	に,
同	5行目	luminous)	を	luminous power)	に,

	同	8行目	$l \text{ m sr}^{-1}$	を	$l \text{ m sr}^{-1}$	に,
	同	10行目	$l_x = 1 \text{ mm}^{-2}$	を	$l_x = 1 \text{ m m}^{-2}$	に,
p. 258		上から3行目	$\frac{1}{683} \delta$	を	$\frac{1}{683} \delta$	に,
p. 260		式(2-14)の分母中	$\cos(\theta_0 - \theta_2)$	を	$\cos^2(\theta_0 - \theta_2)$	に,
p. 263		下から5行目のはじめの	B_{uL}	を	B_{Lu}	に,
p. 264		式(3-8)右辺の	$P_e(\nu) d\nu$	を	$P_e(\nu)$	に,
p. 266		式(3-21)右辺途中の	,	を	.	に,
p. 268		上から6行目の式の後部	$Ni \nu \sigma_{uL}$	を	$Ni \nu \sigma_{uL}$	に,
p. 270		式(3-56)中の最後の	$G_{nZ}(\nu)$	を	$G_{nZ}(\nu)$	に,
同		上から2行目	$G_{nZ}(\nu)$	を	$G_{nZ}(\nu)$	に,
同		式(3-58)中の	$G_{nZ}(\nu)$	を	$G_{nZ}(\nu)$	に,
同		式(3-65)の分母	$\partial(\nu_1 E_L)$	を	$\partial(\nu, E_L)$	に,
p. 271		下から8行目	$E_u + d E_L$	を	E_u と $E_u + d E_u$	に,
同		式(3-72)左辺被積分関数中	$A_{uL}(E_u, E_u)$	を	$A_{uL}(E_u, E_L)$	に,
p. 272		式(3-80)中	$\frac{E_H}{\nu_E}$	を	$\frac{E_H}{\nu E}$	に,
p. 275		式(3-99)の中ほど	\bar{G}_n	を	\bar{G}_{nZ}	に,
同		式(3-100)の左辺	\bar{G}_{nZ}	を	\bar{G}_{nZ}	に,
		同被積分関数中	$G_{nZ}(\nu)$	を	$G_{nZ}(\nu)$	に,
p. 276		式(3-101)右辺 \sum 記号の下限	$n \geq n_g$	を	$n \geq n_0$	に,
p. 278		上から16行目	必要がある	を	必要がある ^{15),18)} .	に, それぞれ

なおす.